

Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Feuille de TD numéro 4 : groupe symétrique

Exercice 1. Déterminer le produit et l'inverse des permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour chacune des permutations ci-dessous, déterminer son écriture comme produit de cycles à supports disjoints, puis sa signature :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \tau_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \\ \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \tau_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ \tau_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} & \tau_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3. Écrire la table de multiplication de S_3 .

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit σ un élément de S_n . Considérons l'application linéaire suivante :

$$\phi_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, e_i \mapsto e_{\sigma(i)}.$$

- (1) L'application ϕ_σ est-elle bijective ?
- (2) Pour $n = 2$ et $n = 3$ et $\sigma \in S_n$, écrire la matrice de ϕ_σ dans la base $\mathcal{B}$.
- (3) Montrer que $\phi_\sigma \circ \phi_\tau = \phi_{\sigma\tau}$ pour tous $\sigma, \tau \in S_n$.
- (4) Calculer le déterminant de ϕ_σ .

Exercice 5. On considère les permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer $\sigma\tau$.
- (2) Déterminer la décomposition en cycles à supports disjoints et la signature de σ et τ .
- (3) Déterminer les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\sigma^m = \tau^n$.
- (4) Quel est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\sigma^n = \text{id}$?
- (5) Calculer σ^{2026} .

Exercice 6.

- (1) Soit $\tau \in S_n$ le r -cycle $(i_1 \cdots i_r)$. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, montrer que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est le r -cycle $(\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r))$.
- (2) Montrer que $\sigma\tau = \tau\sigma$ si et seulement si il existe $i \geq 0$ tel que $\sigma(x) = \tau^i(x)$ pour tout x dans le support de τ .

Dans la suite de l'exercice, on considère la permutation suivante :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 7 & 3 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_9.$$

- (3) Écrire la décomposition $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_p$ de α en cycles à supports disjoints.
- (4) Soit $\sigma \in S_9$. Montrer que $\sigma\alpha = \alpha\sigma$ si et seulement si $\sigma\alpha_i = \alpha_i\sigma$ pour tout $i = 1, \dots, p$.
- (5) Dénombrer les permutations $\sigma \in S_9$ telles que $\sigma\alpha = \alpha\sigma$.

Exercice 7. Soit G un groupe.

- (1) Soit $g \in G$. Montrer que l'application $\varphi_g : G \rightarrow G : h \mapsto gh$ est une bijection.
- (2) Montrer que l'application $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(G) : g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes injectif (ce résultat est appelé théorème de Cayley).

On suppose dorénavant que le groupe G est fini et on note n son cardinal. On se donne une énumération $g_1, \dots, g_n$ des éléments de G . La bijection $G \rightarrow \{1, \dots, n\} : g_i \mapsto i$ induit un isomorphisme θ entre $\text{Bij}(G)$ et S_n . On définit $\psi = \theta \circ \varphi$.

- (3) En utilisant l'exercice 4, montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif de G vers $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
- (4) Trouver un groupe fini G et un entier $n < |G|$ tel qu'il existe un morphisme de groupes injectif de G vers $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ (cela démontre que le résultat de la question précédente n'est pas optimal en général).
- (5) Démontrer que si $g \in G$ est d'ordre k , alors $\psi(g)$ est un produit de $|G|/k$ cycles de longueur k .
- (6) Si n est impair, montrer que $\psi(G)$ est contenu dans A_n .

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier et soit X l'ensemble des paires $\{i, j\}$ d'entiers distincts compris entre 1 et n . Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ et toute paire $P = \{i, j\} \in X$, on note $\sigma(P)$ la paire $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$, et l'on note $I(\sigma)$ l'ensemble des inversions de σ , c'est-à-dire des paires $\{i, j\} \in X$ telles que $(\sigma(i) - \sigma(j))/(i - j) < 0$.

- (1) Montrer que si σ et τ sont deux éléments de S_n alors

$$I(\sigma \circ \tau) = [I(\tau) \cup \tau^{-1}(I(\sigma))] \setminus [I(\tau) \cap \tau^{-1}(I(\sigma))].$$

- (2) Montrer que $|I(\sigma \circ \tau)| = |I(\sigma)| + |I(\tau)| - 2|I(\tau) \cap \tau^{-1}(I(\sigma))|$.
- (3) En déduire que l'application $\varphi : \sigma \in S_n \mapsto (-1)^{|I(\sigma)|} \in \{1, -1\}$ est un morphisme de groupes.
- (4) Calculer la valeur de φ sur une transposition et en déduire que φ coïncide avec la signature.