Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Corrigé de la feuille de TD numéro 4

Exercice 1.

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (1634)(25) & \epsilon(\tau_1) &= (-1)^2 = 1 \\
\tau_2 &= (123456)(789) & \epsilon(\tau_2) &= (-1) \times 1 = -1 \\
\tau_3 &= (182)(467) & \epsilon(\tau_3) &= 1^2 = 1 \\
\tau_4 &= (15)(2864)(397) & \epsilon(\tau_4) &= (-1)^2 \times 1 = 1 \\
\tau_5 &= (1345)(268) & \epsilon(\tau_5) &= (-1) \times 1 = -1 \\
\tau_6 &= (134)(257)(6\ 10\ 8) & \epsilon(\tau_6) &= 1^3 = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Le groupe S_3 est de cardinal $3! = 6$. Voici la liste de ses éléments :

$$e = \mathrm{id}, \qquad \sigma = (123), \qquad \sigma^2 = \sigma^{-1} = (132),$$
$$\tau_1 = (23) \qquad \tau_2 = (13), \qquad \tau_3 = (12).$$

La table de multiplication d'un groupe G de cardinal n est un tableau à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes qui donne le résultat de chaque produit gg' avec g donné par la ligne et g' donné par la colonne. Par exemple, pour $G = S_3$, la case correspondant à la ligne τ_1 et à la colonne σ contient $\tau_1\sigma = (23)(123) = (13) = \tau_2$. Voici la table de multiplication complète de S_3 :

	e	σ	σ^2	τ_1	τ_2	τ_3
e	e	σ	σ^2	τ_1	τ_2	τ_3
σ	σ	σ^2	e	τ_3	τ_1	τ_2
σ^2	σ^2	e	σ	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	e	σ	σ^2
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	σ^2	e	σ
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	σ	σ^2	e

Exercice 4.

(1) L'application ϕ_σ est bijective car elle envoie la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ sur une base de $\mathbb{R}^n$.

(2) Soit A_σ la matrice de ϕ_σ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour $n = 2$, on a :

$$A_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 3$, on a :

$$A_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{(13)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Comme il s'agit d'applications linéaires il suffit de tester cette identité sur la base $\mathcal{B}$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a $\phi_{\sigma\tau}(e_i) = e_{\sigma\tau(i)} = \phi_\sigma(e_{\tau(i)}) = \phi_\sigma(\phi_\tau(e_i))$, ce qui conclut.

(4) On commence par décomposer σ comme produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$. Il découle de la question (3) que $\det(\phi_\sigma) = \det(\phi_{\tau_1}) \cdots \det(\phi_{\tau_k})$. Or $\det(\phi_\tau) = -1$ pour toute transposition τ, donc $\det(\phi_\sigma) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 5.

(1) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma = (1357)(246)$ et $\tau = (127)(364)$.

(3) $\sigma^n = (1357)^n(246)^n$ donc le plus petit $n \geq 1$ tel que $\sigma^n = e$ est le ppcm de 3 et 4, c'est-à-dire 12.

(4) Cette égalité est vraie si et seulement si m et n sont des multiples de 12.

(5) $2026 = 2\ [4]$ et $2026 = 1\ [3]$ car $2026 = 4 * 506 + 2$ et $2026 = 3 * 675 + 1$. Donc on a $\sigma^{2026} = (1357)^2(246)^1 = (1537)(264)$.

Exercice 6.

(1) Soit $x \in \{1, \ldots, n\}$. On distingue deux cas.

Premier cas. Si $\sigma(x)$ n'appartient pas à $\{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_r)\}$ alors x n'appartient pas au support de τ (à savoir $\{i_1, \ldots, i_r\}$), donc on a :

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma\tau(x) = \sigma(x).$$

Second cas. Si $\sigma(x)$ appartient à $\{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_r)\}$ alors $x = i_\lambda$ pour un certain entier $1 \leq \lambda \leq r$, et on a :

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma\tau(i_\lambda) = \sigma(i_\mu),$$

où $\mu \in \{1, \ldots, r\}$ avec $\mu \equiv \lambda + 1$ modulo r.

(2) On suppose d'abord qu'il existe $i \geq 0$ tel que $\sigma(x) = \tau^i(x)$ pour tout x dans le support S de τ. Notons en particulier que $\sigma(S) = S$, et donc aussi $\sigma(S^c) = S^c$ où S^c désigne le complémentaire de S dans $\{1, \ldots, n\}$ (puisque σ est bijective). Pour x dans S, on a donc $\sigma\tau(x) = \tau^{i+1}(x) = \tau\sigma(x)$. Pour x dans S^c, l'élément $\sigma(x)$ est encore dans S^c (en vertu de la remarque ci-dessus), d'où $\sigma\tau(x) = \sigma(x) = \tau\sigma(x)$. On a donc démontré que $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Réciproquement, supposons que $\sigma\tau = \tau\sigma$. On a $\sigma(\tau(i_1)) = \tau(\sigma(i_1))$, donc $\sigma(i_2) = \tau(\sigma(i_1))$. Ainsi, $\sigma(i_1)$ appartient au support de τ, d'où $\sigma(i_1) = i_k$ pour un certain k. On en déduit que, pour tout entier m, on a $\sigma(i_m) = \sigma(\tau^m(i_1)) = \tau^m(\sigma(i_1)) = \tau^m(i_k) = i_{k'}$ où $k' = k + m$ modulo r. Autrement dit, on a $\sigma = \tau^k$.

(3) On a $\alpha = (149)(2578)(36)$.

(4) On écrit $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(149)\sigma^{-1})(\sigma(2578)\sigma^{-1})(\sigma(36)\sigma^{-1})$. D'après la question (1), on a donc $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(4)\sigma(9))(\sigma(2)\sigma(5)\sigma(7)\sigma(8))(\sigma(3)\sigma(6))$. En vertu de l'unicité de la décomposition en cycles à supports disjoints (à l'ordre près des cycles), on a $\sigma(149)\sigma^{-1} = (149)$, $\sigma(2578)\sigma^{-1} = (2578)$ et $\sigma(36)\sigma^{-1} = (36)$.

(5) D'après les questions (4) et (2) on trouve qu'un tel σ est de la forme $\sigma = (149)^{n_1}(2578)^{n_2}(36)^{n_3}$ avec

$$n_1 \in \{0, 1, 2\}, \quad n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad n_3 \in \{0, 1\}.$$

Ainsi, il y a $3 \times 4 \times 2 = 24$ permutations σ telles que $\sigma\alpha = \alpha\sigma$.

Exercice 7.

(1) Il est clair que $\varphi_{g^{-1}}$ est l'inverse de φ_g.

(2) Pour tous $g, g', h \in G$, on a $\varphi(gg')(h) = gg'h = g(g'h) = \varphi(g) \circ \varphi(g')(h)$, donc $\varphi(gg') = \varphi(g) \circ \varphi(g')$, ce qui démontre que φ est un morphisme. Il est clairement injectif : si $\varphi(g) = \mathrm{id}$ alors $g = e$.

(3) On vient de démontrer qu'il existe un morphisme injectif ψ de G dans S_n. D'autre part, l'application $\theta : \sigma \in S_n \mapsto \phi_\sigma$ (où ϕ_σ est défini dans l'énoncé de l'exercice 4) est un morphisme de groupes de S_n vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (d'après la question (3) de l'exercice 4), et il est clair que ϕ_σ ne peut être l'identité que si σ est l'idendité, donc θ est injectif. Ainsi, $\theta \circ \psi$ est un morphisme de groupes injectif de G vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(4) On a vu dans la feuille de TD numéro 1 que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n$ièmes de l'unité est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ de cardinal n. Or $\mathbb{C}^*$ se plonge dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ via $a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, donc il existe un morphisme injectif de $\mathbb{U}_n$ vers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour tout $n \geq 1$.

(5) Soit $g \in G$. On suppose que g est d'ordre k, ce qui signifie que $g^k = e$ et $g^\ell \neq e$ pour tout $\ell < k$. Pour $g_i \in G$, les éléments $g_i, gg_i, \ldots, g^{k-1}g_i$ sont deux à deux distincts, et $g^k g_i = g_i$. On voit donc que $\psi(g)$ est un produit de k-cycles. Comme tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ appartient à l'un de ces k-cycles, le nombre de k-cycles est n/k où $n = |G|$.

(6) La signature de $\psi(g)$ est égale à $((-1)^{k-1})^{n/k}$. Si n est impair, alors k est impair, donc $k - 1$ est pair, donc $\varepsilon(\psi(g)) = 1$, donc l'image de G par ψ est contenue dans A_n.

Exercice 8.

(1) On écrit

$$\frac{\sigma \circ \tau(i) - \sigma \circ \tau(j)}{i - j} = \frac{\sigma \circ \tau(i) - \sigma \circ \tau(i)}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}.$$

Ce produit est < 0 si et seulement si l'un des deux facteurs est > 0 et l'autre est < 0, si et seulement si $(\sigma \circ \tau(i) - \sigma \circ \tau(i))/(\tau(i) - \tau(j)) < 0$ et $(\tau(i) - \tau(j))/(i - j) > 0$ ou $(\sigma \circ \tau(i) - \sigma \circ \tau(i))/(\tau(i) - \tau(j)) > 0$ et $(\tau(i) - \tau(j))/(i - j) < 0$, si et seulement si $\{\tau(i), \tau(j)\} \in I(\sigma)$ et $\{i, j\} \notin I(\tau)$ ou $\{\tau(i), \tau(j)\} \notin I(\sigma)$ et $\{i, j\} \in I(\tau)$, si et seulement si $\{i, j\} \in \tau^{-1}(I(\sigma)) \cap I(\tau)^c \cup \tau^{-1}(I(\sigma))^c \cap I(\tau)$.

(2) On passe au cardinal dans l'égalité précédente, et on utilise l'égalité $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(3) On déduit de la question (2) que $(-1)^{|I(\sigma\circ\tau)|} = (-1)^{|I(\sigma)|}(-1)^{|I(\tau)|}$, d'où le résultat.

(4) Si σ est une transposition, on vérifie que $|I(\sigma)|$ est impair, donc que $(-1)^{|I(\sigma)|} = -1$. Comme S_n est engendré par les transpositions (autrement dit, toute permutation est un produit de transpositions), et comme φ et ε coïncident sur les transpositions, on obtient $\varphi = \varepsilon$.