Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Feuille de TD numéro 5 : déterminant

Exercice 1. Soient V et W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f\colon V^n \to W$ une application n-linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in V$.

(1) Exprimer $f(\lambda x, \ldots, \lambda x)$ en fonction de $f(x, \ldots, x)$.

(2) Pour $n = 2$ et $n = 3$, développer respectivement $f(x+y, x+y)$ et $f(x+y, x+y, x+y)$.

(3) On suppose que f est symétrique. Que deviennent les formules précédentes ?

(4) Dans cette question, on suppose toujours que f est symétrique, mais n est désormais quelconque. Donner une formule pour $f(x + y, \ldots, x + y)$.

Exercice 2. On considère l'application $\omega\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$$

où $x = (x_1, \ldots, x_4)$ et $y = (y_1, \ldots, y_4)$.

(1) Montrer que ω est une application bilinéaire antisymétrique.

(2) En déduire que si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $\omega(x, y) = 0$.

(3) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right).$$

où $x = (x_1, \ldots, x_4)$ et $y = (y_1, \ldots, y_4)$.

(1) Montrer que l'application f est bilinéaire antisymétrique.

(2) Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $f(x, y) = 0$.

(3) Montrer que si $x_1 \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ alors $y = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}^4$ non liés tels que $f(x, y) = 0$?

(5) Trouver une application bilinéaire antisymétrique $g = (g_1, \ldots, g_n)\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ telle que $f = (g_1, g_2, g_3)$ et $g(x, y) = 0$ si et seulement si x, y sont liés.

Exercice 4. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,8\}}$ une matrice carrée de taille 8 à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Dans la formule de $\det(A)$, déterminer le signe correspondant aux termes suivants :

1. $a_{1,8}a_{2,7}a_{3,1}a_{4,6}a_{5,3}a_{6,4}a_{7,2}a_{8,5}$;
2. $a_{1,8}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,6}a_{5,5}a_{6,7}a_{7,4}a_{8,2}$;
3. $a_{1,3}a_{2,6}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1}a_{6,8}a_{7,7}a_{8,2}$;
4. $a_{1,6}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2}a_{6,3}a_{7,7}a_{8,8}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $0 \leq a_{i,j} < 1$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, et $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer par récurrence que $|\det A| < 1$.

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = B$. On écrit $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que l'application $f : t \in \mathbb{C} \mapsto \det(P_1 + tP_2)$ est polynomiale et non nulle.

(2) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels. On note $D(x_1, \ldots, x_n)$ le déterminant de la matrice ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_1 \\ \vdots & x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & x_3 & \cdots & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer les déterminants $D(x_1)$ et $D(x_1, x_2)$.

(2) Calculer $D(x_1, \ldots, x_n)$ pour tout entier $n \geq 1$ en détaillant les opérations utilisées.

Exercice 8. On considère la permutation suivante de l'ensemble $\{1, \ldots, 7\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note A la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 7}$ où $a_{i,j} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et 0 sinon. Calculer le déterminant de A.

Exercice 9. Soit n un entier naturel au moins égal à 2, et soit a un nombre complexe. On note D_n le déterminant de la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ci-dessous (dont les coefficients sont tous nuls en dehors de la diagonale, de la $n$ième ligne et de la $n$ième colonne) :

$$\begin{pmatrix} a & & & & n-1 \\ & a & & & \vdots \\ & & \ddots & & 2 \\ & & & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(1) Démontrer que $D_{n+1} = aD_n - n^2 a^{n-1}$ en détaillant les opérations utilisées.

(2) En déduire la formule suivante, pour $n \geq 2$:

$$D_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Exercice 10. On considère les matrices par blocs M et N ci-dessous, où A désigne une matrice carrée inversible et D désigne une matrice carrée (pas nécessairement de la même taille que A) :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

(1) À l'aide de la matrice N, démontrer que $\det(M) = \det(D - CA^{-1}B)\det(A)$.

(2) En déduire une nouvelle preuve de la formule de la question (2) de l'exercice précédent.

Exercice 11. Soient $\mathbb{K}$ un corps, a un élément non trivial de $\mathbb{K}$ et

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire la valeur de $\det(A)$ en fonction de a.

Exercice 12. Pour un entier $n \geq 1$, on définit la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$$

dont les coefficients diagonaux et ceux juste en dessous valent -1, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $D_n = \det(A_n)$.

(1) Calculer D_1 et D_2.

(2) Montrer que $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$, pour des entiers $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.

(3) Soit V l'ensemble des suites $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{i+2} = bu_{i+1} + cu_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que V est un espace vectoriel de dimension 2.

(4) Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ distincts tels que $u = (\lambda^i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $v = (\mu^i)_{i\in\mathbb{N}}$ appartiennent à V.

(5) Montrer que u et v forment une base de V.

(6) Donner une formule pour D_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 13. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$ un entier. Pour $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ on considère le déterminant dit de *Vandermonde*

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer la formule suivante :

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \tag{$\clubsuit$}$$

(1) Montrer que $V(a_0, \ldots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$ pour certains $i \neq j$.

(2) Vérifier le résultat pour $n = 1, 2$.

(3) Montrer la formule

$$V(a_0, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0). \tag{1}$$

(4) Conclure par récurrence.

Exercice 14. Le but de cet exercice est de donner une preuve différente de l'égalité ($\clubsuit$).

(1) Montrer que $f(X) = V(X, a_1, \ldots, a_n) \in K[X]$ est un polynôme de degré $\leq n$.

(2) Déterminer les racines de f.

(3) Calculer le coefficient dominant de f.

(4) Conclure.

Exercice 15. On considère la permutation sur 8 élements suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_8(\mathbb{Q})$ avec $a_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $a_{ij} = 5$ sinon. Montrer que $\det(A) - 1$ est un multiple de 25.

Exercice 16. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & t+6 \\ 4 & 4 & 6-t & 8 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer $\det A_t$.

(2) Déterminer les nombres réels t pour lesquels la matrice A_t n'est pas inversible.

(3) Déterminer le noyau de A_t pour tout $t \in \mathbb{R}$.