Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Corrigé de la feuille de TD numéro 5

Exercice 1.

(1) On a $f(\lambda x, \dots, \lambda x) = \lambda^n f(x, \dots, x)$ car f est linéaire par rapport à chaque variable.

(2)

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y), \\ f(x+y, x+y, x+y) &= f(x,x,x) + f(x,x,y) + f(x,y,x) + f(x,y,y) \\ &\quad + f(y,x,x) + f(y,x,y) + f(y,y,x) + f(y,y,y). \end{aligned}$$

(3) Par symétrie, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) &= f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y), \\ f(x+y, x+y, x+y) &= f(x,x,x) + 3f(x,x,y) + 3f(y,y,x) + f(y,y,y). \end{aligned}$$

(4) $f(x+y, \dots, x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ fois}}, \underbrace{y, \dots, y}_{n-k \text{ fois}})$.

Exercice 2.

(1) On remarque tout d'abord qu'on peut écrire

$$\omega(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant étant bilinéaire antisymétrique, et une somme de formes bilinéaires antisymétriques étant encore bilinéaire antisymétrique, ω est bilinéaire antisymétrique.

(2) Quitte à échanger x et y, on peut supposer $y = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\omega(x,y) = \omega(x, \lambda x) = \lambda \omega(x,x) = 0$$

car $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$ par antisymétrie.

(3) Non, par exemple $\omega(e_1, e_4) = 0$.

Exercice 3.

(1) et (2) découlent directement des propriétés du déterminant.

(3) Comme x_1 est non nul, on peut écrire $y_i = \frac{y_1}{x_1} x_i$ pour $i = 2, 3, 4$. Il suffit alors de prendre $\lambda = y_1/x_1$.

(4) Oui, par exemple $x = e_2$ et $y = e_3$.

(5) On peut prendre par exemple

$$g(x,y) = \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right).$$

Exercice 4.

Cela revient à calculer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1853)(27)(46) \qquad \epsilon(\sigma_1) = -1$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (182)(467) \qquad \epsilon(\sigma_2) = 1$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1345)(268) \qquad \epsilon(\sigma_3) = -1$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (1634)(25) \qquad \epsilon(\sigma_4) = 1.$$

Exercice 5.

On fait un développement par rapport à la ligne 1, on obtient

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j}),$$

où $A_{1,j} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ désigne la matrice obtenue à partir de A en retirant la ligne 1 et la colonne j. L'inégalité triangulaire, combinée au fait que les coefficients sont positifs, donne :

$$|\det(A)| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} |\det(A_{1,j})|$$

Par hypothèse de récurrence, $|\det(A_{1,j})| < 1$ pour tout j, d'où :

$$|\det(A)| < \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \leq 1.$$

Exercice 6.

(1) Le caractère polynomial de f découle de la formule du déterminant. Comme $P_1 + iP_2$ est inversible, on a $f(i) \neq 0$, donc f est non nulle.

(2) Comme f est une application polynomiale non nulle, l'ensemble des $t \in \mathbb{C}$ tels que $f(t) = 0$ est fini. Il existe donc un réel r tel que $f(r) \neq 0$. Par ailleurs, on a $AP_i = P_i B$ pour $i \in \{1, 2\}$, donc $A(P_1 + tP_2) = (P_1 + tP_2)B$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. En particulier, $A(P_1 + rP_2) = (P_1 + rP_2)B$, et la matrice $P = P_1 + rP_2$ est inversible à coefficients réels.

Exercice 7.

(1) $D(x_1) = x_1$ et $D(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_1x_1 = x_1(x_2 - x_1)$.

(2) On voit immédiatement que $D(0, \ldots, x_n) = 0$. Supposons dorénavant que x_1 est non nul, et faisons les opérations $C_i \leftarrow C_i - (x_i/x_1)C_1$ pour tout $2 \leq i \leq n$, de façon à obtenir le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix}
x_1 & x_1-x_2 & x_1-x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & x_1-x_n \\
\vdots & 0 & x_2-x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & x_2-x_n \\
\vdots & \vdots & 0 & x_3-x_4 & \cdots & \cdots & x_3-x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & x_{n-1}-x_n \\
x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}$$

On fait ensuite $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, ce qui donne :

$$\begin{vmatrix}
0 & x_1-x_2 & x_1-x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & x_1-x_n \\
\vdots & 0 & x_2-x_3 & \cdots & \cdots & \cdots & x_2-x_n \\
\vdots & \vdots & 0 & x_3-x_4 & \cdots & \cdots & x_3-x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & x_{n-1}-x_n \\
x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}$$

En faisant un développement par rapport à la première colonne, on obtient donc $D(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{n-1}x_1(x_1-x_2)(x_2-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n)$. Pour $n=2$, on retrouve bien $D(x_1,x_2)$ calculé à la question (1).

Exercice 8. On utilise la formule du déterminant :

$$\det(A) = \sum_{\alpha \in S_7} \epsilon(\alpha) \prod_{i=1}^{7} a_{i,\alpha(i)}.$$

Si $\alpha \neq \sigma$, il existe $i \in \{1, \ldots, 7\}$ tel que $\alpha(i) \neq \sigma(i)$, d'où $a_{i,\alpha(i)} = 0$. Par conséquent, le produit $\prod_{i=1}^{7} a_{i,\alpha(i)}$ est nul sauf si $\alpha = \sigma$, auquel cas ce produit vaut 1. Ainsi, $\det(A) = \epsilon(\sigma) = -1$.

Exercice 9.

(1) On fait un développement de D_{n+1} par rapport à la première ligne, on obtient $D_{n+1} = aD_n + n(-1)^{n+2}D'_n$ où D'_n est le déterminant de la matrice suivante (avec des 0 sur la diagonale sauf en bas à droite, et des a sur la surdiagonale) :

$$\begin{pmatrix}
0 & a & & \\
& & & \\
& & 0 & a \\
n & \cdots & 2 & 1
\end{pmatrix}.$$

On développe ensuite D'_n par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$D_{n+1} = aD_n + n(-1)^{n+2}n(-1)^{n+1}a^{n-1},$$

d'où

$$D_{n+1} = aD_n - n^2 a^{n-1}.$$

(2) On démontre la formule par récurrence. Pour $n = 2$ on trouve $D_2 = a^2 - 1$ par un calcul direct, et pour le passage de n à $n+1$ on utilise la question (1).

Exercice 10.

(1) En calculant le produit MN, on trouve

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice est triangulaire par blocs, on a $\det(MN) = \det(I)\det(D - CA^{-1}B) = \det(D - CA^{-1}B)$. D'autre part, la matrice N étant également triangulaire par blocs, on a $\det(N) = \det(A^{-1})\det(I) = 1/\det(A)$. Enfin, on peut utiliser la multiplicativité du déterminant pour conclure que $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(M)/\det(A) = \det(D - CA^{-1}B)$.

(2) On prend pour A la matrice diagonale de taille $n-1$ avec des a sur la diagonale, on prend $D = (a)$, on prend pour C la matrice ligne $(n - 1 \cdots 1)$ et pour B la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $a \neq 0$, la matrice A est inversible et un rapide calcul donne

$$CA^{-1}B = \left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right).$$

On en déduit que

$$D_n = a^{n-1} \left(a - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Pour $a = 0$, on voit facilement que le déterminant est nul (par exemple en développant par rapport à la première ligne ou colonne), et la formule est donc valable pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 11.

En faisant les opérations $L_i - L_{i+1} \to L_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ on trouve :

$$\chi_{M_a}(X) = \det(M_a - XI_n) = \begin{pmatrix} -X-a & X+a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X-a & X+a & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -X-a & X+a & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -X-a & X+a \\ a & \cdots & a & a & -X \end{pmatrix}$$

$$= (X+a)^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 1 \\ a & \cdots & a & a & -X \end{pmatrix}$$

En faisant l'opération $C_1 + \cdots + C_n \to C_n$ on trouve

$$\begin{aligned}\chi_{M_a}(X) &= (X+a)^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ a & \cdots & a & a & -X+(n-1)a \end{pmatrix} \\ &= (X+a)^{n-1}(-X+(n-1)a)(-1)^{n-1}\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du développement par rapport à la dernière colonne. En particulier, en évaluant χ_{M_a} en 0, on obtient $\det(M_a) = (-1)^{n-1}(n-1)a^n$.

Exercice 12.

(1) On a $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$.

(2) En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$D_n = -D_{n-1} + \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1. \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne on trouve

$$D_n = -D_{n-1} + 2D_{n-2}.$$

(3) On considère l'application linéaire $\phi\colon V \to \mathbb{Q}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$. On vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme : si une suite u appartient au noyau de ϕ, on montre par récurrence sur i que $u_i = 0$. Pour $i = 0, 1$ c'est vrai par hypothèse. Pour $i \geq 2$, on suppose le résultat vrai pour $j < i$. Alors $u_i = -u_{i-1} + 2u_{i-2} = 0 + 0 = 0$. Pour montrer que ϕ est surjective, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$, on pose $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ et pour tout $i \geq 2$, $u_i = -u_{i-1} + 2u_{i-2}$. Alors la suite $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartient à V par construction, et $\phi(u) = (\alpha, \beta)$.

(4) On suppose $\lambda \neq 0$. Alors $u = (\lambda^i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartient à V si et seulement $\lambda^i = -\lambda^{i-1} + \lambda^{i-2}$, ou de façon équivalente, comme $\lambda \neq 0$,

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

C'est un polynôme de degré 2 dont les racines sont 1 et -2. On pose $\lambda = 1$ et $\mu = -2$.

(5) L'isomorphisme ϕ préservant l'indépendence linéaire, il suffit de constater que $\phi(u) = (1, 1)$ et $\phi(v) = (1, -2)$ sont linéairement indépendants.

(6) On pose $D_0 = 1$ de sorte que $D = (D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite dans V. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $D = \alpha u + \beta v$, ce qui revient au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha - 2\beta & = & -1. \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$ et donc $D_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 13.

(1) Si $a_i = a_j$ pour $i \neq j$ alors $V(a_0, \dots, a_n)$ est le déterminant d'une matrice dont deux colonnes coïncident, donc il est nul.

(2) Pour $n = 1$, on a :

$$V(a_0, a_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 - a_0.$$

Pour $n = 2$, en faisant les opérations $L_3 - a_0 L_2 \to L_3$ et $L_2 - a_0 L_1 \to L_2$, puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} V(a_0, a_1, a_2) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ 0 & a_1(a_1 - a_0) & a_2(a_2 - a_0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ a_1(a_1 - a_0) & a_2(a_2 - a_0) \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - a_0)(a_2 - a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1). \end{aligned}$$

(3) En faisant les opérations $L_n - a_0 L_{n-1} \to L_n, \dots, L_2 - a_0 L_1 \to L_2$ puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 - a_0 & \cdots & a_n - a_0 \\ 0 & a_1(a_1 - a_0) & \cdots & a_n(a_n - a_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1^{n-1}(a_1 - a_0) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & \cdots & a_n - a_0 \\ a_1(a_1 - a_0) & \cdots & a_n(a_n - a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1 - a_0) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) V(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

(4) D'après la question (2), le résultat est vrai pour $n = 1, 2$. Pour $n \geq 3$, on suppose le résultat vrai pour $n - 1$. Alors

$$\begin{aligned} V(a_0, \dots, a_n) &= V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) \\ &\overset{\substack{\text{hyp.} \\ \text{réc.}}}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

Exercice 14.

(1) On développe $V(a_0, \ldots, a_n)$ par rapport á la première colonne. On obtient

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \det(A_{i,1})$$

où $A_{i,1}$ est la matrice obtenue en retirant la première colonne et la i-ème ligne de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

En particulier, f est de degré au plus n.

(2) On a $f(a_i) = V(a_i, a_1, \ldots, a_n) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ (voir la question (1) de l'exercice précédent). Si $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts, alors $a_1, \ldots, a_n$ sont les racines de f car un polynôme de degré $\leq n$ a au plus n racines.

(3) Pour $i = n$ on a

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = V(a_1, \ldots, a_n).$$

Le coefficient dominant de f est donc $(-1)^n V(a_1, \ldots, a_n)$.

(4) Si $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas deux à deux distincts, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc égaux. Sinon, d'après les questions (2) et (3), on a :

$$f(X) = (-1)^n V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) = V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_i - X).$$

On conclut en prenant $X = a_0$.

Exercice 15.

Par définition du déterminant, on a :

$$\det A = \sum_{\tau \in S_8} \epsilon(\tau) \prod_{i=1}^{8} a_{\tau(i),i} = \epsilon(\sigma) + \sum_{\tau \in S_8 \setminus \{\sigma\}} \epsilon(\tau) \prod_{i=1}^{8} a_{\tau(i),i}$$

car $a_{\sigma(i),i} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, 8\}$. Or $\sigma = (164)(27853)$ donc $\epsilon(\sigma) = 1$. Pour conclure, on observe que toute bijection de l'ensemble $\{1, \ldots, 8\}$ dans lui-même qui fixe sept éléments fixe tous les éléments. Ainsi, toute permutation $\tau \in S_8 \setminus \{\sigma\}$ diffère de σ en deux valeurs au moins, et il en découle que le produit $\prod_{i=1}^{8} a_{\tau(i),i}$ est divisible par $5^2 = 25$.

Exercice 16.

(1) En développant suivant la dernière ligne, on trouve :

$$\det A_t = (t-2)\det\begin{pmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & t+6 \\ 4 & 6-t & 8 \end{pmatrix}$$

Ensuite, en faisant l'opération élémentaire $L_1 + L_2 - L_3 \to L_2$, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ t-2 & t-2 & t-2 \\ 4 & 6-t & 8 \end{pmatrix} = (t-2)\det\begin{pmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6-t & 8 \end{pmatrix}$$

En faisant les opérations $C_1 - C_3 \to C_1$ et $C_2 - C_3 \to C_2$ puis en développant suivant la deuxième ligne, on obtient :

$$\det\begin{pmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6-t & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -(t+2) & 8 \end{pmatrix} = (t-2)\det\begin{pmatrix} t-2 & -1 \\ 4 & t+2 \end{pmatrix}$$

On trouve finalement $\det A_t = t^2(t-2)^2$.

(2) La matrice A_t est inversible si et seulement si son déterminant est non nul si et seulement si $t \neq 0$ et $t \neq 2$.

(3) La matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3 et son noyau est engendré par le vecteur $(1, 0, -2, 1)$. La matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 et son noyau est engendré par les vecteurs $(2, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, 0)$.