

Feuille de TD numéro 6

**Exercice 1.**

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et déterminer ses racines.
- (2) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- (3) Déterminer une base de chaque espace propre de  $A$ .

**Exercice 2.**

On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique de  $B$  et déterminer ses racines.
- (2) La matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?
- (3) Déterminer une base de chaque espace propre de  $B$ .
- (4) Calculer  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 3.**

On considère la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique de  $C$  et déterminer ses racines.
- (2) La matrice  $C$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 4.**

On considère les matrices suivantes, à coefficients dans un corps  $K$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_t = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour  $K = \mathbb{R}$  puis  $K = \mathbb{C}$ , déterminer quand ces matrices sont diagonalisables et les diagonaliser si elles le sont.

**Exercice 5.**

(1) Diagonaliser la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(2) Déterminer toutes les matrices  $N \in M_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $M$ .

**Exercice 6.**

Soient  $n \geq 1$  un entier,  $K$  un corps de caractéristique différente de  $n$ ,  $a \in K^\times$  et  $M_a$  la matrice suivante :

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que  $\text{Ker}(M_a + aI)$  est de dimension  $n - 1$ .
- (2) En calculant  $\text{Tr}(M_a)$ , trouver la dernière valeur propre de  $M_a$ .
- (3) En déduire que  $M_a$  est diagonalisable et déterminer son déterminant.
- (4) Déterminer le polynôme minimal de  $M_a$ .

**Exercice 7.**

On considère la matrice  $A = (ij)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ .

- (1) Quelle est la dimension de  $\text{Ker}(A)$  ?
- (2) Calculer  $\text{Tr}(A)$ . En déduire que  $A$  est diagonalisable.
- (3) Plus généralement, à quelle condition nécessaire et suffisante une matrice de rang 1 est-elle diagonalisable ?

**Exercice 8.**

Soit  $A \in M_4(\mathbb{C})$ . On suppose que les valeurs propres de  $A$  sont  $1, -1, i$  et  $-i$ .

- (1) Justifier que  $A$  est diagonalisable et inversible.
- (2) Exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$ .
- (3) Plus généralement, si une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est inversible, montrer que  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ .

**Exercice 9.**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^4$ , et soit  $J$  la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

- (1) Pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , calculer  $J^2 e_i$ ,  $J^3 e_i$  et  $J^4 e_i$ .
- (2) Écrire les matrices  $J^2, J^3, J^4$ .
- (3) On suppose qu'il existe  $A \in M_4(\mathbb{C})$  tel que  $A^2 = J$ . Que peut-on dire des valeurs propres de  $A$ ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de  $A$ ?
- (4) Obtenir une contradiction, puis conclure.

**Exercice 10.**

- (1) Étant donné un nombre réel  $a > 0$ , étudier la convergence de la suite définie par  $u_0 > 0$  et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

- (2) Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . On suppose que  $A$  est diagonalisable et que les valeurs propres de  $A$  sont dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Étudier la convergence de la suite de matrices définie par  $A_0 = I$  et

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} (A_n + AA_n^{-1}).$$

**Exercice 11.**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie.

- (1) Soient  $u, v$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Soit  $\lambda \in K$  une valeur propre de  $v$ . Montrer que  $u(E_\lambda(v)) \subset E_\lambda(v)$ .
- (2) Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $u(F) \subset F$ . Si  $u$  est diagonalisable, démontrer que  $u|_F$  est diagonalisable.
- (3) Si  $u_1, \dots, u_n$  sont des endomorphismes diagonalisables de  $E$  qui commutent deux à deux, démontrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $u_1, \dots, u_n$  sont toutes diagonales.

**Exercice 12.**

Soit  $G$  un sous-groupe fini abélien de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ . On note  $k$  son cardinal. Montrer que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ .

**Exercice 13.**

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 2$  à coefficients réels. On considère l'application  $\varphi : E \rightarrow E$  qui à tout polynôme  $P(X)$  associe le polynôme  $X^2 P(\frac{1}{X})$ .

- (1) Expliquer pourquoi  $\varphi$  est bien définie, puis montrer que c'est une application linéaire.
- (2) Écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(1, X, X^2)$  de  $E$  et calculer son déterminant. En déduire que l'application  $\varphi$  est bijective.
- (3) Donner une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est diagonale.

**Exercice 14.**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$  avec  $c \neq 0$ ,  $\mathcal{S}$  l'espace vectoriel des suites complexes  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$  formé des suites vérifiant la relation

$$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n.$$

- (1) Déterminer la dimension de  $E$ .
- (2) Soit  $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite  $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$  sur la suite  $D(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ . Montrer que  $E$  est stable par  $D$ .
- (3) Montrer que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $D|_E$  si et seulement si  $P(\lambda) = 0$  pour un certain polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré 3 que l'on explicitera, et déterminer les vecteurs propres associés à  $\lambda$ .
- (4) On suppose que les trois racines  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$  de  $P$  sont deux à deux distinctes. Montrer que les suites  $(\lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont linéairement indépendantes.
- (5) On suppose  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  et  $\lambda_3 = 2$ . Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  telle que  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 4 = u_2$ . Déterminer  $u_{99}$  et  $u_{100}$ .

**Exercice 15.**

Soient  $n \geq 1$  un nombre entier et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Pour  $\sigma \in S_n$  on considère l'application linéaire  $\phi_\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  définie par  $\phi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

- (1) Montrer que pour tout  $\sigma, \tau \in S_n$  on a  $\phi_\sigma \circ \phi_\tau = \phi_{\sigma \circ \tau}$ .

On considère la permutation suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Écrire la matrice  $J$  de l'application  $\phi_\sigma$  dans la base  $\mathcal{B}$  et montrer sans calcul que  $J^n = I$ .
- (3) Soient  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $\zeta_k = e^{2k\pi i/n}$ . Montrer que le vecteur  $v_k = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-1} e_i$  est un vecteur propre de  $J$  et déterminer la valeur propre correspondante.
- (4) Montrer que les vecteurs  $v_k$  sont linéairement indépendants.

Pour  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$  on considère la matrice suivante :

$$C(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i J^i \in M_n(\mathbb{C}).$$

- (5) Écrire la matrice  $C(x_0, x_1, x_2, x_3)$ .
- (6) Pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , montrer que  $v_k$  est un vecteur propre de  $C(x_0, \dots, x_{n-1})$  et déterminer la valeur propre correspondante.
- (7) Calculer le déterminant de  $C(x_0, \dots, x_{n-1})$ .