

**Exercice 1.**

(1)

$$\begin{aligned} \det(A - XI) &= \det \begin{pmatrix} 2 - X & -3 & -6 \\ 0 & 5 - X & 6 \\ -1 & -5 & -5 - X \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \rightarrow L_1 + L_2}{=} (2 - X) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 - X & 6 \\ -1 & -5 & -5 - X \end{pmatrix} \\ &\stackrel{C_2 \rightarrow C_2 - C_1}{=} (2 - X) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 - X & 6 \\ -1 & -4 & -5 - X \end{pmatrix} \\ &= (2 - X)(X^2 - 1) \\ &= -(X - 2)(X - 1)(X + 1). \end{aligned}$$

(2) La matrice  $A$  est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

(3) En résolvant le système linéaire  $(A - \lambda I)x = 0$  pour chaque  $\lambda$  appartenant au spectre, on trouve :

$$E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-1}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Exercice 2.**

(1)  $\det(B - XI) = -(X - 1)^2(X + 1)$ .

(2) La matrice  $B$  est diagonalisable si et seulement si la multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est égale à sa multiplicité algébrique, c'est-à-dire si  $E_1(B)$  est de dimension 2. On voit aisément que  $E_1(B) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ , qui est bien de dimension 2. Ainsi,  $B$  est diagonalisable.

(3) On trouve :

$$E_1(B) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-1}(B) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(4) On note  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers la base  $((1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, -1))$ , de sorte que  $B = P \text{diag}(1, 1, -1) P^{-1}$ . Ainsi,  $B^n = P \text{diag}(1, 1, (-1)^n) P^{-1}$ .

**Exercice 3.**

(1)

$$\begin{aligned}
\det(C - XI) &= \det \begin{pmatrix} -2 - X & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 - X & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 - X & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} = (X + 1) \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -2 \\ 1 & 4 - X & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 - X & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} \\
&= (X + 1) \det \begin{pmatrix} 0 & 3 - X & 1 & 1 \\ 1 & 4 - X & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 - X & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} = (X + 1) \det \begin{pmatrix} 3 - X & 1 & 1 \\ -1 & 1 - X & 0 \\ -1 & -1 & -X \end{pmatrix} \\
&= (X + 1)(X - 2) \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - X & 0 \\ 0 & -1 & -X \end{pmatrix} = (X + 1)(X - 2) \det \begin{pmatrix} 0 & 2 - X & 1 \\ 1 & 1 - X & 0 \\ 0 & -1 & -X \end{pmatrix} \\
&= (X + 1)(X - 2)(X - 1)^2.
\end{aligned}$$

(2) Un calcul montre que  $\dim \text{Ker}(C - I) = 1$ . Comme cette dimension est strictement plus petite que la multiplicité de 1 comme racine du polynôme caractéristique de  $C$ , on conclut que  $C$  n'est pas diagonalisable.

**Exercice 4.**

(1) Le polynôme caractéristique de  $A$  vaut  $X(X - 2)$ . Il y a deux valeurs propres distinctes, donc  $A$  est diagonalisable. Une base de vecteurs propres est formée de  $(1, -1)$  pour la valeur propre 0 et  $(1, 1)$  pour la valeur propre 2.

(2) Le polynôme caractéristique de  $B_t$  vaut  $X^2 - 2tX + t^2 = (X - t)^2$  donc  $t$  est l'unique valeur propre. La matrice  $B_t - tI$  est de rang 1, donc  $B_t$  n'est jamais diagonalisable.

(3) Le polynôme caractéristique de  $C$  vaut  $X^2 - 2X + 2$ . Le discriminant de ce polynôme est strictement négatif donc si  $K = \mathbb{R}$  la matrice n'est pas diagonalisable. Si  $K = \mathbb{C}$  la matrice est diagonalisable, les valeurs propres sont  $1 \pm i$  et les vecteurs propres correspondants sont  $(\pm i, 1)$ .

(4) La matrice  $D$  est symétrique donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Son polynôme caractéristique est  $X^2 - 2$  donc les valeurs propres de sont  $\pm\sqrt{2}$ . Les vecteurs propres correspondantes sont  $(1, \pm\sqrt{2})$ .

(5) La matrice  $E$  est de rang 1 donc diagonalisable. Le vecteur  $(1, 1, 1)$  est vecteur propre pour 3 alors que le noyau est engendré par  $(1, -1, 0)$  et  $(1, 0, -1)$ .

(6) La matrice  $F$  est symétrique donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Elle est de rang 2 donc 0 est valeur propre de multiplicité 1 et le noyau est engendré par  $(1, 0, -1)$ . Les deux autres valeurs propres ne sont pas évidentes. Pour les trouver, on calcule le polynôme caractéristique de  $F$ ; on trouve  $2X - X^3$ , donc les deux valeurs propres manquantes sont  $\pm\sqrt{2}$ . Les vecteurs propres correspondants sont  $(1, \pm\sqrt{2}, 1)$  respectivement.

(7) Le polynôme caractéristique de  $G_t$  est  $X^2 - 2X - t - 3$ . Le discriminant de ce polynôme est  $\Delta_t = 4(t + 4)$ . La matrice  $G_t$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si  $\Delta_t > 0$ , c'est-à-dire  $t > -4$ , car son polynôme caractéristique est alors scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\Delta_t < 0$ , c'est-à-dire  $t < -4$ , la matrice  $G_t$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  mais elle l'est sur  $\mathbb{C}$  car les deux valeurs propres sont distinctes. Si  $\Delta = 0$ , alors  $t = -4$ . La seule valeur propre de  $G_{-4}$  est

1, de multiplicité algébrique 2. Or  $G_{-4} - I$  est de rang 1, donc  $G_{-4}$  n'est pas diagonalisable (ni sur  $\mathbb{R}$  ni sur  $\mathbb{C}$ ).

**Exercice 5.**

(1) On commence par calculer le polynôme caractéristique de  $M$ . On trouve

$$\begin{aligned} \det(M - XI) &= \det \begin{pmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2 - X & 0 \\ -2 & 2 & 1 - X \end{pmatrix} \\ &= (1 - X) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 - X & 0 \\ 1 & 2 & 1 - X \end{pmatrix} \\ &= (1 - X) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 - X & 1 \\ 0 & 0 & 2 - X \end{pmatrix} = (1 - X)(X + 4)(X - 2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 1, 2 et 4, toutes de multiplicité 1. Ainsi, la matrice  $M$  est diagonalisable. On calcule ensuite les espaces propres :

$$\ker(M - I) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(M - 2I) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(M + 4I) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dans la base  $\mathcal{B}$  formée des vecteurs propres ci-dessus (dans cet ordre), la matrice de l'endomorphisme associé à  $M$  est  $\text{diag}(1, 2, -4)$ .

(2) On commence par déterminer toutes les matrices  $N'$  qui commutent avec  $\text{diag}(1, 2, -4)$  : un calcul montre que ce sont exactement les matrices diagonales. Notons ensuite  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers la base  $\mathcal{B}$  (autrement dit, la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs déterminés à la question (1)), et observons qu'une matrice  $N$  commute avec  $M$  si et seulement si  $P^{-1}NP$  commute avec  $P^{-1}MP = \text{diag}(1, 2, -4)$ . Ainsi,  $N$  commute avec  $M$  si et seulement si  $N = P\text{diag}(a_1, a_2, a_3)P^{-1}$  avec  $a_i \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 6.**

(1) La matrice  $M_a + aI$  est clairement de rang 1, donc son noyau est de dimension  $n - 1$ .

(2) D'après la question (1),  $-a$  est valeur propre de multiplicité algébrique au moins égale à  $n - 1$ . Comme la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité), et puisque  $\text{Tr}(M_a) = 0$ , la dernière valeur propre  $\lambda$  de  $M_a$  satisfait  $\lambda - (n - 1)a = 0$ , d'où  $\lambda = (n - 1)a$ . Notons que  $(n - 1)a \neq -a$  car  $na \neq 0$  (ici on utilise l'hypothèse que  $n \neq 0$  dans  $K$ ).

(3) Pour chaque valeur propre, la dimension de l'espace propre associé est bien égale à la multiplicité de la valeur propre comme racine du polynôme caractéristique, donc  $M_a$  est diagonalisable. Le déterminant est le produit des valeurs propres et vaut donc

$$(-a)^{n-1}(n-1)a = (-1)^{n-1}(n-1)a^n.$$

(4) Puisque  $M_a$  est diagonalisable et possède exactement deux valeurs propres distinctes  $-a$  et  $(n - 1)a$ , son polynôme minimal est  $(X + a)(X - (n - 1)a)$ . On pouvait également le déterminer directement (sans connaître les valeurs propres de  $M_a$ ) en observant que

$(M_a + aI)^2 = n(M_a + aI)$ , donc que  $(X + a)^2 - n(X + a) = (X + a)(X - (n - 1)a)$  est annulateur.

**Exercice 7.**

(1) La matrice  $A$  est égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Comme la première ligne n'est pas nulle et toutes les autres en sont des multiples, le rang de  $A$  vaut 1. Le noyau est donc de dimension  $n - 1$  (théorème du rang).

(2) La trace de  $A$  est égale à  $1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ . Comme la dimension de  $\text{Ker}(A)$  est  $n - 1$ , la multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda = 0$  est au moins  $n - 1$ . Elle est exactement  $n - 1$  car la trace de  $A$  n'est pas nulle. La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

(3) Une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle (même argument que ci-dessus).

**Exercice 8.**

(1) La matrice  $A$  est de taille quatre et possède quatre valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Son déterminant est le produit des valeurs propres, soit  $\det A = -1$ . Comme il est non nul,  $A$  est inversible.

(2) Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i) = X^4 - 1$ . Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc  $A^4 = I_n$ , ce qui implique  $A^{-1} = A^3$ .

(3) On note  $\chi_A(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ . On a  $a_0 = \det(A) \neq 0$  et  $\chi_A(A) = 0$ , donc  $-a_0 I = a_n A^n + \cdots + a_1 A = (a_n A^{n-1} + \cdots + a_1)A = A(a_n A^{n-1} + \cdots + a_1)$ , donc  $A^{-1}$  est égale à  $(a_n A^{n-1} + \cdots + a_1)/a_0$ .

**Exercice 9.**

(1) On a  $J^k e_i = e_{i-k}$  si  $i \leq k + 1$  et sinon  $J^k e_i = 0$ .

(2) D'après la question précédente, on trouve :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda^2$  est une valeur propre de  $J$ . Les valeurs propres de  $J$  sont toutes nulles, donc les valeurs propre de  $A$  le sont aussi. Par conséquent,  $\chi_A(X) = X^4$ .

(4) Par Cayley-Hamilton on a  $\chi_A(A) = A^4 = 0$ , mais  $A^4 = J^2 \neq 0$ .

**Exercice 10.**

(1) Il est clair que  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n$ . On écrit

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2.$$

On en déduit que  $u_n \geq \sqrt{a}$  pour tout  $n \geq 1$ . Par ailleurs, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2u_n}(a - u_n^2) \leq 0.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par  $\sqrt{a}$ , donc elle converge vers un certain nombre réel  $\ell \geq \sqrt{a}$ , qui est nécessairement un point fixe de la fonction  $f(x) = (x + a/x)/2$  (car cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ). Les deux points fixes de  $f$  étant  $\pm\sqrt{a}$ , on a donc  $\ell = \sqrt{a}$ .

(2) Quitte à remplacer  $A$  par  $P^{-1}AP$  pour une matrice  $P$  inversible, on peut supposer que  $A$  est diagonale. Pour commencer, montrons par récurrence que  $A_n$  est diagonale et inversible pour tout entier naturel  $n$  (donc que la formule de récurrence est bien définie) : c'est évident pour  $n = 0$  puisque  $A_0 = I$  ; si  $A_n$  est inversible, alors en notant  $d_i$  le  $i$ ème terme diagonal de la matrice  $A$  et en notant  $u_{i,n}$  le  $i$ ème terme diagonal de la matrice  $A_n$ , on a  $u_{i,0} = 1$ ,  $u_{i,n} \neq 0$  (puisque  $A$  est diagonale et inversible) et

$$u_{i,n+1} = \frac{1}{2} \left( u_{i,n} + \frac{a}{u_{i,n}} \right).$$

La matrice  $A_{n+1}$  est donc diagonale et, comme à la première question, on obtient  $u_{i,n+1} - \sqrt{d_i} \geq 0$ , d'où  $u_{i,n+1} \geq \sqrt{d_i} > 0$ , et donc  $A_{n+1}$  est inversible. L'expression ci-dessus, combinée à la première question, montre que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les  $\sqrt{d_i}$ , c'est-à-dire vers une racine carrée de  $A$ .

**Exercice 11.**

(1) Soit  $x$  un vecteur propre de  $v$  associé à  $\lambda$ . On a  $v(x) = \lambda x$ , donc  $v(u(x)) = u(v(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$ , ce qui démontre que  $u(x)$  appartient à  $E_\lambda(v)$ .

(2) Comme  $u$  est diagonalisable, on peut écrire  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ , donc

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \cap F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u|_F)} E_\lambda(u|_F),$$

donc  $u|_F$  est diagonalisable.

(3) Démontrons le résultat par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , c'est évident. Supposons que le résultat est vrai pour  $n$ , et démontrons-le pour  $n + 1$ . Comme  $u_{n+1}$  est diagonalisable, on peut écrire  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_{n+1})} E_\lambda(u_{n+1})$ . Comme  $u_i \circ u_{n+1} = u_{n+1} \circ u_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , chaque  $E_\lambda(u_{n+1})$  est stable par tout  $u_i$ , donc d'après la question (2) la restriction de tout  $u_i$  à  $E_\lambda(u_{n+1})$  est diagonalisable. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, pour tout  $\lambda$  dans le spectre de  $u_{n+1}$ , à la famille des restrictions des  $u_i$  à  $E_\lambda(u_{n+1})$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

**Exercice 12.**

D'après le théorème de Lagrange, on a  $g^k = e$  pour tout  $g \in G$ . Ainsi, tout élément de  $G$  est annulé par  $X^k - 1$ . Par conséquent, comme ce polynôme est scindé à racines simples, tout élément de  $G$  est diagonalisable. L'exercice précédent montre que les éléments sont

diagonalisables dans une base commune  $\mathcal{B}$ . Notons  $P$  la matrice de passage de la base canonique dans cette base. En notant  $\lambda = e^{2i\pi/k}$ , on voit donc que  $P^{-1}GP$  est contenu dans  $\langle \text{diag}(\lambda, 1, 1, \dots, 1) \rangle \times \langle \text{diag}(1, \lambda, 1, \dots, 1) \rangle \times \dots \times \langle \text{diag}(1, 1, 1, \dots, \lambda) \rangle \simeq (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ .

**Exercice 13.**

(1) L'application  $\varphi$  est bien définie car  $X^2P(\frac{1}{X})$  est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels (en effet, si  $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$  alors  $X^2P(\frac{1}{X}) = a_0X^2 + a_1X + a_2$ ).

Si  $P, P'$  désignent deux éléments de  $\mathbb{R}_2[X]$  et si  $\lambda$  désigne un nombre réel, on a  $\varphi(\lambda P + P') = X^2(\lambda P + P')(\frac{1}{X}) = \lambda X^2P(\frac{1}{X}) + X^2P'(\frac{1}{X}) = \lambda\varphi(P) + \varphi(P')$ , donc  $\varphi$  est bien linéaire.

(2) La matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(1, X, X^2)$  de  $E$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut  $-1$  (car on obtient  $A$  à partir de la matrice identité en échangeant la première et la troisième colonne). Comme son déterminant est non nul, l'application  $\varphi$  est bijective.

(3) Notons  $e_1 = 1, e_2 = X$  et  $e_3 = X^2$ . On a  $\varphi(e_2) = e_2$ , et on observe que  $\varphi(e_1 + e_3) = e_1 + e_3$  et  $\varphi(e_1 - e_3) = e_3 - e_1$ . En posant  $v_1 = e_2, v_2 = e_1 + e_3$  et  $v_3 = e_1 - e_3$ , on obtient donc une base  $(v_1, v_2, v_3)$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 14.**

(1) On considère l'application linéaire  $\phi: E \rightarrow \mathbb{C}^3$  définie par  $\phi(u) = (u_0, u_1, u_2)$ . Elle est injective car  $\phi(u) = (0, 0, 0)$  implique  $u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par récurrence immédiate grâce à la relation  $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ . D'autre part, si on se donne  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ , on construit par récurrence une suite  $u \in E$  telle que  $u_0 = x, u_1 = y$  et  $u_2 = z$ . L'application linéaire  $\phi$  est donc un isomorphisme, d'où  $\dim E = 3$ .

(2) La suite  $v = D(u)$  est définie par  $v_n = u_{n+1}$ . On a donc, pour tout  $n \geq 0$  :

$$v_{n+3} = av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n \iff u_{n+4} = au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1}.$$

Il en découle que  $v$  appartient à  $E$ .

(3) Si  $D(u) = \lambda u$  alors  $u_{n+1} = \lambda u_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Si  $u$  est un vecteur propre, alors par définition  $u \neq 0$ . Il en découle que pour tout  $n \geq 0, u_n = \lambda^n u_0$  avec  $u_0 \neq 0$  et  $\lambda \neq 0$  (en effet, si  $\lambda$  était nul alors  $u_n$  serait nul pour tout  $n \geq 1$ , contredisant le fait que  $u_0 \neq 0$  et  $c \neq 0$ ). Les vecteurs propres associés à  $\lambda$  sont donc les multiples non nuls de la suite  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Notons ensuite que la relation  $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$  devient  $\lambda^{n+3} = a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n$ . Comme  $\lambda \neq 0$ , on peut diviser la relation précédente par  $\lambda^n$ , ce qui donne  $\lambda^3 = a\lambda^2 + b\lambda + c$ , ou encore  $P(\lambda) = 0$  avec  $P(x) = x^3 - ax^2 - bx - c$ . Remarquons que  $P$  n'est autre que le polynôme caractéristique de  $D|_E$ .

(4) Il suffit de noter que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une base libre. Alternativement, on peut donner un argument direct en utilisant l'isomorphisme  $\phi$  défini plus haut :  $\phi((\lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}) = (1, \lambda_i, \lambda_i^2)$ , donc on a

$$\det(\phi((\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}), \phi((\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}}), \phi((\lambda_3^n)_{n \in \mathbb{N}})) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0.$$

(5) On écrit  $u = \alpha_1(\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \alpha_2(\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}} + \alpha_3(\lambda_3^n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ . On a donc, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \alpha_3 \lambda_3^n$ . En prenant  $n = 0, 1, 2$ , on obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues. On trouve  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$  et  $\alpha_3 = 1$ , donc :

$$u_n = 1 + (-1)^{n+1} + 2^n = \begin{cases} 2 + 2^n & \text{si } n \text{ impair,} \\ 2^n & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

### Exercice 15.

(1) Comme toutes les applications en question sont linéaires, il suffit de tester l'égalité sur la base canonique. On a, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\phi_\sigma(\phi_\tau(e_i)) = \phi_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{\sigma(\tau(i))} = \phi_{\sigma \circ \tau}(e_i).$$

(2) On a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité  $J^n = I$  vient de  $\phi_\sigma^n = \phi_{\sigma^n} = \phi_{\text{id}} = \text{id}$ .

(3) On a

$$\phi_\sigma(v_k) = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-1} \phi_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_k^{i-1} e_{i+1} + \zeta_k^{n-1} e_1 = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-2} e_i = \zeta_k^{-1} v_k$$

où on a utilisé  $\zeta_k^n = 1$ . Donc  $v_k$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\zeta_k^{-1}$ .

(4) On considère la matrice dont la  $k$ ième colonne est  $v_k$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta_1 & \cdots & \zeta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta_1^{n-1} & \cdots & \zeta_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par le déterminant de Vandermonde son déterminant est  $\prod_{0 \leq k < \ell \leq n-1} (\zeta_\ell - \zeta_k)$  qui est non nul. Donc les vecteurs  $v_0, \dots, v_{n-1}$  sont linéairement indépendants.

(5) On a

$$C(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

(6) Il s'agit d'évaluer  $\phi = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \phi_\sigma^i$  en  $v_k$ . Comme  $v_k$  est un vecteur propre de  $\phi_\sigma$  pour la valeur propre  $\zeta_k^{-1}$ , on a que  $v_k$  est vecteur propre de  $\phi$  pour la valeur propre  $\sum_{i=0}^{n-1} x_i \zeta_k^{-i}$ .

(7) Le déterminant est le produit des valeurs propres :

$$\det C(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \zeta_k^{-i}$$