

Exercice 1.

Soit K un corps, soit $A \in M_n(K)$ une matrice nilpotente. Montrer que 0 est la seule valeur propre de A .

Exercice 2.

- (1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.
- (2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Démontrer que A est nilpotente.
- (3) Peut-on relâcher l'hypothèse $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$ dans la question (2) tout en conservant la même conclusion ?

Exercice 3.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

- (1) Calculer le polynôme minimal de A .
- (2) Montrer que n est pair.

Exercice 4.

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel E . On suppose que $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous $i, j \in I$.

- (1) Démontrer par récurrence sur $\dim(E)$ que les u_i possèdent un vecteur propre commun.
- (2) Démontrer par récurrence sur $\dim(E)$ que les u_i sont cotrigonalisables (c'est-à-dire qu'ils sont trigonalisables dans une base commune).

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soient u_1, \dots, u_n des endomorphismes nilpotents de E . On suppose que $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que

$$u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0.$$

Exercice 7.

On considère un polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ de degré $n \geq 2$ à coefficients dans un corps K . Soit M la matrice suivante, appelée matrice compagnon de P :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

- (1) Montrer que $\det(M - XI) = (-1)^n P(X)$.
- (2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer que l'espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(M - \lambda I)$ est de dimension 1 et en donner un générateur.

Exercice 8. Soit $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que M est d'ordre fini $d \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que $|\text{Tr}(M)|$ appartient à $\{0, 1, 2\}$.
- (2) Faire la liste des polynômes caractéristiques possibles de M et, dans chaque cas, exhiber une matrice explicite qui réalise ce polynôme caractéristique.
- (3) Quels sont les polynômes minimaux possibles ?
- (4) Montrer que d appartient à $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- (5) On admet le résultat suivant : pour $\theta \in \pi\mathbb{Q}$, si $\cos(\theta)$ est rationnel alors $|\cos(\theta)|$ appartient à $\{0, 1/2, 1\}$. Montrer que les résultats démontrés dans les questions (1) à (4) restent valables pour $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$.
- (6) Les résultats ci-dessus restent-ils valables pour $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 9.

Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant k (cela signifie que, pour tout $g \in G$, $g^k = I_n$).

- (1) Montrer que l'ensemble T des traces des éléments de G est fini.
- (2) Soit (g_1, \dots, g_d) une base du sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par G . Montrer que l'application $f : G \rightarrow T^d : g \mapsto (\text{Tr}(gg_1), \dots, \text{Tr}(gg_d))$ est injective.
- (3) En déduire que G est fini.

Exercice 10.

Soit $n \geq 1$ un entier, soit p un nombre premier. Calculer le cardinal de $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 11.

Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ d'ordre fini. On suppose que tous les coefficients de $M - I_n$ sont divisibles par 3 et on définit $N = (M - I_n)/3$.

- (1) Montrer que N est diagonalisable dans \mathbb{C} et que ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.
- (2) En déduire que N est nilpotente, puis que N est la matrice nulle et donc que $M = I_n$.
- (3) On considère le morphisme (d'anneaux) $\varphi : \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de réduction des coefficients modulo 3. Montrer que pour tout sous-groupe fini G de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$, $\varphi|_G$ est injectif.

(4) En déduire un majorant du cardinal de tout sous-groupe fini de G de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 12.

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E . Démontrer qu'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$.

Exercice 13.

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E . On suppose que E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces stables par u . Pour tout $x \in E$ non nul, démontrer que la famille $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ est une base de E .

Exercice 14.

On considère une matrice non nulle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À quelle condition A est-elle semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 15.

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$.

- (1) Montrer que $AB^k - B^kA = kB^k$ pour tout entier $k \geq 0$.
- (2) Montrer que B est nilpotente.

Exercice 16.

Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que tout élément de F est nilpotent. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

- (1) Montrer que $F \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.
- (2) Montrer que $\dim(F) \leq n(n-1)/2$.
- (3) Montrer que le majorant est atteint pour un F bien choisi.

Exercice 17.

Soient A et B deux matrices diagonalisables. On suppose que $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$ pour tout entier $k \geq 0$. Montrer que A et B sont semblables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(K)$ telle que $PAP^{-1} = B$.