

**Exercice 1.**

Comme  $A$  est nilpotente, il existe  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0$ , donc le polynôme  $X^k$  est annulateur de  $A$ . Le polynôme minimal de  $A$  est donc égal à  $X^\ell$  pour un entier  $1 \leq \ell \leq k$ . Or le spectre de  $A$  coïncide avec les racines de  $\chi_A$ , donc 0 est bien la seule valeur propre de  $A$ .

**Exercice 2.**

(1) On note que la matrice  $A^k$  est nilpotente pour tout  $k \geq 1$ . D'après l'exercice 1,  $\text{Sp}(A^k) = \{0\}$ . Or  $\text{Tr}(A^k)$  est la somme des valeurs propres de  $A^k$ , donc  $\text{Tr}(A^k) = 0$ .

(2) Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ . On a  $\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ . Soient  $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_d}$  les valeurs propres *distinctes non nulles* de  $A$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \geq 1$  leurs multiplicités algébriques. On a alors  $\sum_{\ell=1}^d \lambda_{i_\ell}^k a_\ell = 0$  pour tout  $k \geq 1$ , ou encore

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & \lambda_{i_2} & \cdots & \lambda_{i_d} \\ \lambda_{i_1}^2 & \lambda_{i_2}^2 & \cdots & \lambda_{i_d}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{i_1}^d & \lambda_{i_2}^d & \cdots & \lambda_{i_d}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = 0.$$

Or, si tous les  $\lambda_j$  sont distincts et non nuls, la matrice ci-dessus est inversible (déterminant de Vandermonde) et elle ne peut donc avoir un noyau non trivial. Il s'ensuit que  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est donc  $X^n$  et  $A$  est nilpotente par le théorème de Cayley-Hamilton.

(3) Pour que la preuve ci-dessus fonctionne, il suffit de supposer que  $\text{Tr}(A^k) = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ .

**Exercice 3.**

(1) Le polynôme minimal de  $A$  est  $X^2 + 1$ . En effet,  $X^2 + 1$  annule la matrice  $A$  par hypothèse. Son polynôme minimal divise donc  $X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , mais comme ce polynôme de degré 2 n'a pas de racine réelle, ses seuls diviseurs unitaires sont 1 (qui n'annule pas  $A$ ) et  $X^2 + 1$ .

(2) Si  $A^2 = -I_n$ , alors  $\det(A)^2 = \det(A^2) = \det(-I_n) = (-1)^n$  et comme  $\det(A)^2$  est un nombre réel positif,  $n$  est forcément pair.

**Exercice 4.**

Si une telle matrice  $B$  existait, son déterminant  $\det(B)$  satisferait  $(\det(B))^2 = 2$ . Mais le déterminant d'une matrice à coefficients rationnels est un nombre rationnel et les seules solutions de  $x^2 = 2$  sont  $x = \sqrt{2}$  et  $x = -\sqrt{2}$ , qui ne sont pas rationnelles.

**Exercice 5.**

(1) Si tous les  $u_i$  sont des homothéties, tout vecteur non nul est vecteur propre de tous les  $u_i$ . Supposons donc, quitte à renuméroter les  $u_i$ , que  $u_1$  n'est pas une homothétie. Il existe donc un sous-espace propre  $F$  de  $u_1$  de dimension  $< \dim(E)$ . Or  $u_i \circ u_1 = u_1 \circ u_i$

pour tout  $i \in I$ , donc  $F$  est stable par tous les  $u_i$ . En outre, la restriction de  $u_i$  à  $F$  est encore trigonalisable (car le polynôme caractéristique de  $u_i|_F$  divise celui de  $u_i$  et est donc scindé). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille  $(u_i|_F)_{i \in I}$ .

(2) D'après la question (1), il existe un vecteur propre commun à tous les  $u_i$ . Notons  $v_1$  un tel vecteur. On peut trouver une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$ . Dans cette base, les matrices des  $u_i$  sont de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

On applique l'hypothèse de récurrence aux blocs de taille  $n-1$  en bas à droite des matrices des  $u_i$ .

### Exercice 6.

D'après l'exercice précédent, on peut trouver une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de chaque  $u_i$  est triangulaire supérieure. Comme  $u_i$  est nilpotente, sa seule valeur propre est 0, donc la matrice de chaque  $u_i$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. En notant  $F_0 = \{0\}$  et  $F_k$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $v_1, \dots, v_k$ , on a  $u_i(F_k) \subset F_{k-1}$  pour tous  $i, k \in \{1, \dots, n\}$ . Il s'ensuit que  $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n(F_n) \subset \{0\}$ , donc  $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n = 0$ .

### Exercice 7.

(1) Pour calculer le polynôme caractéristique de  $M$  on remplace la première colonne de  $\det(XI - M)$  par  $\sum_{i=1}^n X^{i-1} C_i$ . On obtient :

$$\chi_M(X) = \det(XI - M) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X & -1 \\ P(X) & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} - X \end{vmatrix}.$$

En développant selon la première colonne on trouve  $\chi_M(X) = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}P(X) = P(X)$ .

(2) La matrice  $M - \lambda I$  est de rang  $\leq n-1$  car  $\lambda$  est une valeur propre. La matrice obtenue à partir de  $M - \lambda I$  en retirant la première colonne et la dernière ligne est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, donc c'est une matrice carrée inversible de taille  $n-1$ . On a donc  $\text{rang}(M - \lambda I) = n-1$ . L'espace propre correspondant à  $\lambda$  est donc de dimension 1. Un calcul montre ensuite que cet espace propre est engendré par le vecteur  $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$ .

### Exercice 8.

(1)  $M^d = I$  donc  $X^d - 1$  est annulateur, donc les valeurs propres de  $M$  sont de module 1, donc  $|\text{Tr}(M)| \leq 2$ . De plus,  $\text{Tr}(M)$  appartient à  $\mathbb{Z}$ , d'où le résultat.

(2) On a  $\chi_M(X) = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$ . Si les valeurs propres sont complexes conjuguées, alors  $\text{Sp}(M) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$  avec  $\theta \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ . On a  $\det(M) = 1$  et  $\text{Tr}(M) = 2 \cos(\theta) \in \{-1, 0, 1\}$ . Les polynômes caractéristiques possibles sont donc  $X^2 - X + 1, X^2 +$

$1, X^2 + X + 1$ . Ce sont aussi les polynômes minimaux. Si les racines sont réelles, on peut avoir  $\text{Sp}(M) = \{1\}$  ou  $\text{Sp}(M) = \{-1\}$  ou  $\text{Sp}(M) = \{-1, 1\}$ . Les polynômes caractéristiques correspondants sont  $(X - 1)^2$ ,  $(X + 1)^2$ ,  $(X - 1)(X + 1)$ . Dans le dernier cas, c'est aussi le polynôme minimal. Dans les deux autres cas, le polynôme minimal est  $X - 1$  et  $X + 1$  respectivement. On obtient dans chaque cas une matrice explicite en prenant la matrice compagnon associée au polynôme considéré (voir exercice précédent).

(3) Voir ci-dessus.

(4) La matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  (car le polynôme annulateur  $X^d - 1$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ ) et ses valeurs propres sont les racines de  $\chi_M$ . Or  $\chi_M$  est soit égal à  $(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$  avec  $\lambda$  une racine de l'unité d'ordre 3, 4 ou 6, soit égal à  $(X - 1)^2$  ou  $(X + 1)^2$  ou  $(X - 1)(X + 1)$ , d'où le résultat.

(5) On a  $\chi_M(X) = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$ . Si  $\chi_M$  a une valeur propre  $e^{i\theta}$  non réelle, alors  $\text{Tr}(M) = 2 \cos(\theta)$ . Or  $M$  est à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , donc  $\text{Tr}(M)$  appartient à  $\{0, \pm 1, \pm 2\}$  d'après le résultat admis, et  $\pm 2$  est exclu car  $e^{i\theta}$  est différent de  $\pm 1$ . La suite en découle sans modification.

(6) Non, en considérant des matrices de rotation on voit que l'ordre d'une matrice d'ordre fini peut être arbitrairement grand.

### Exercice 9.

(1) Les valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  de tout  $g \in G$  sont des racines  $k$ èmes de l'unité, qui sont au nombre de  $k$ , et  $\text{Tr}(g)$  est la somme des valeurs propres de  $g$ .

(2) Si  $f(g) = f(g')$  alors  $\text{Tr}(gg_i) = \text{Tr}(g'g_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ , donc  $\text{Tr}(gh) = \text{Tr}(g'h)$  pour tout  $h$  appartenant au sous-espace vectoriel engendré par  $g_1, \dots, g_d$ . En particulier,  $\text{Tr}(gh) = \text{Tr}(g'h)$  pour tout  $h \in G$ . Pour  $h = g^{-1}$ , on trouve  $\text{Tr}(g'g^{-1}) = \text{Tr}(\text{id}) = n$ . Or  $\text{Tr}(g'g^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  où les  $\lambda_i$  désignent les valeurs propres de  $g'g^{-1}$  (éventuellement redondantes), qui sont de module 1. Il s'ensuit que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ . Or  $g'g^{-1}$  est diagonalisable, donc  $g'g^{-1} = \text{id}$ , d'où  $g' = g$ .

(3) Comme  $f$  est injective à valeurs dans un ensemble fini,  $G$  est fini.

### Exercice 10.

Il suffit de dénombrer les bases (puisque un endomorphisme inversible est entièrement déterminé par l'image d'une base). Il y a  $p^n - 1$  choix pour le premier vecteur (car tout vecteur convient hormis le vecteur nul),  $p^n - p$  choix pour le second (car tout vecteur convient hormis les vecteurs colinéaires au premier vecteur),  $p^n - p^2$  pour le troisième, et ainsi de suite. Pour le  $n$ ème vecteur, il reste  $p^n - p^{n-1}$  choix. Ainsi, le cardinal de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  est  $(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$ .

### Exercice 11.

(1) La matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  car  $X^k - 1$  est annulateur (où  $k$  désigne l'ordre de  $M$ ) et scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ . Par conséquent,  $N$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Toute valeur propre de  $N$  est de la forme  $(\lambda - 1)/3$  où  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$ , et  $\lambda$  est de module 1, donc  $|(\lambda - 1)/3| \leq 2/3$  grâce à l'inégalité triangulaire.

(2) La suite  $(N^i)_{i \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 puisque  $N$  est diagonalisable avec des valeurs propres de module  $< 1$ . Or  $N^i$  est à coefficients entiers, donc  $N^i = 0$  pour tout  $i$  assez grand. Ainsi,  $N$  est nilpotente. Or, toute matrice nilpotente et diagonalisable est nulle, d'où  $N = 0$  et  $M = I_n$ .

(3) Si  $M \in G$  appartient au noyau de  $\varphi$  alors  $\varphi(M) = \bar{I} = \varphi(I)$ , donc  $\varphi(M - I) = \bar{0}$ , donc les coefficients de  $M - I$  sont divisibles par 3, donc  $M = I$  d'après les questions précédentes. Donc  $\varphi$  est injectif.

(4) On en déduit que  $G$  est d'ordre au plus  $(3^n - 1)(3^n - 3) \cdots (3^n - 3^{n-1})$  (en vertu de l'exercice précédent).

**Exercice 12.**

On montre que la suite  $(\dim(\text{Ker}(u^k)))_k$  est croissante. Comme elle est à valeurs entières et majorée par la dimension, elle est stationnaire.

**Exercice 13.**

Le sous-espace engendré par  $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$  est stable par  $u$  (car  $u^n$  est une combinaison linéaires des  $u^i$  pour  $i < n$ ). Il n'est pas nul si  $x \neq 0$ , donc c'est l'espace entier.

**Exercice 14.**

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les matrices  $A$  et  $A'$  soient semblables, et pour que les matrices  $A$  et  $A''$  soient semblables.

**Première méthode :** si  $A$  et  $A'$  sont semblables, alors il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}_3(K)$  telle que  $P^{-1}AP = A'$ , ou de façon équivalente  $AP = PA'$ . On écrit

$$P = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite  $AP$  et  $PA'$ . L'égalité  $AP = PA'$  donne  $x_{3,1} = x_{3,2} = 0$ ,  $x_{3,2}b = x_{2,1}$  (donc  $x_{2,1} = 0$ ),  $x_{3,3}b = x_{2,2}$ ,  $x_{2,2}a + x_{3,2}c = x_{1,1}$  (donc  $x_{2,2}a = x_{1,1}$ ) et  $x_{2,3}a + x_{3,3}c = x_{1,2}$ . En particulier, la matrice  $P$  est de la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 0 & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 0 & 0 & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Comme  $P$  est inversible et triangulaire, ses termes diagonaux sont non nuls, donc  $x_{i,i} \neq 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . L'égalité  $x_{3,3}b = x_{2,2}$  donne  $b \neq 0$ , et l'égalité  $x_{2,2}a = x_{1,1}$  donne  $a \neq 0$ . En revanche, aucune condition sur  $c$  ne ressort des équations trouvées.

Réciproquement, supposons  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  et démontrons que  $A$  et  $A'$  sont semblables en exhibant une matrice  $P$  inversible telle que  $AP = PA'$ . Les équations ci-dessus montrent qu'il n'y a pas de condition sur le coefficient  $x_{1,3}$ . On peut donc prendre  $x_{1,3} = 0$ . On dispose également de plusieurs degrés de liberté pour choisir les autres coefficients ; prenons  $x_{1,1} = 1$  et  $x_{2,3} = 0$ . On obtient la matrice  $P$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & c/(ab) & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1/(ab) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est bien inversible et on vérifie sans peine que l'on a bien  $AP = PA'$ , ce qui conclut la preuve de la réciproque. Ainsi, les matrices  $A$  et  $A'$  sont semblables si et seulement si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

La même stratégie appliquée à  $A$  et  $A''$  (au lieu de  $A'$ ) donne :  $A$  et  $A''$  sont semblables si et seulement si  $[a = 0 \text{ et } (b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0)]$  ou  $[a \neq 0 \text{ et } b = 0]$ . Si  $a \neq 0$  et  $b = 0$  on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

et on vérifie que cette matrice est inversible et que l'on a bien  $PA = A''P$ . Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$  on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} c & 0 & \pm 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on vérifie encore que cette matrice est inversible et que l'on a bien  $PA = A''P$  (remarquons que le déterminant de cette matrice est  $-c + \pm b$ , et dans le cas où  $c = \pm b$  on choisit le signe qui permet d'avoir un déterminant non nul).

**Seconde méthode :** on peut aller beaucoup plus rapidement pour trouver les conditions nécessaires sur  $a, b, c$  en remarquant que si  $A$  et  $A'$  sont semblables, alors elles sont de même rang, d'où  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  (si  $a = 0$  ou  $b = 0$ , alors  $A$  est de rang 0 ou 1 tandis que  $A'$  est de rang 2). De même, si  $A$  et  $A''$  sont de même rang alors  $A$  est de rang 1, donc  $[a = 0 \text{ et } (b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0)]$  ou  $[a \neq 0 \text{ et } b = 0]$ .

Pour la réciproque, on peut exhiber une matrice de passage exactement comme nous l'avons fait ci-dessus, ou procéder comme suit. Supposons que  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ . En notant  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $E = K^3$ , on remarque que  $Ae_1 = 0$ . On pose  $e'_1 = e_1$ . On cherche ensuite un vecteur  $v$  tel que  $Av = e'_1$ . En notant  $v = (x, y, z)$ , on trouve  $ay + cz = 1$  et  $bz = 0$ . Cette seconde équation donne  $z = 0$  puisque  $b \neq 0$ , et la première donne  $y = 1/a$  (licite car  $a \neq 0$ ). On prend  $x = 0$  et on pose  $e'_2 = v$ . On cherche ensuite  $w$  tel que  $Aw = e'_2$ . En notant  $w = (x', y', z')$  on trouve  $ay' + cz' = 0$  et  $bz' = 1/a$ . On en déduit que  $z' = 1/(ab)$  et  $y' = -c/(a^2b)$ , et on peut prendre  $x' = 0$ . On pose  $e'_3 = w$ . L'endomorphisme  $u$  dont la matrice est  $A$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  a donc pour matrice  $A'$  dans la base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ , ce qui démontre que  $A$  et  $A'$  sont semblables.

On peut procéder de même pour  $A$  et  $A''$ .

**Troisième méthode :** on va utiliser la décomposition de Jordan. Comme  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ , la matrice  $A$  est semblable à l'une des trois formes de Jordan suivantes :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de blocs de Jordan (c'est-à-dire 3 moins le nombre de 1 sur la surdiagonale) est égal à la multiplicité géométrique de la valeur propre 0. Par le théorème du rang, la multiplicité géométrique, qui est égale à la dimension de  $\ker(A)$ , vaut  $3 - \text{rang}(A)$ . On procède à une disjonction de cas.

- On a  $3 - \text{rang}(A) = 1$  si et seulement si  $\text{rang}(A) = 2$  si et seulement si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ . Dans ce cas  $A$  est semblable à  $J_3 = A'$ .
- On a  $3 - \text{rang}(A) = 2$  si et seulement si  $\text{rang}(A) = 1$  si et seulement si  $[a = 0 \text{ et } (b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0)]$  ou  $[a \neq 0 \text{ et } b = 0]$ . Dans ce cas  $A$  est semblable à  $J_2 = A''$ .

- On a  $3 - \text{rang}(A) = 3$  si et seulement si  $\text{rang}(A) = 0$  si et seulement si  $a = b = c = 0$ . Dans ce cas  $A$  est semblable à  $J_1$ , qui est la matrice nulle.

**Exercice 15.**

- (1) Par récurrence immédiate.
- (2) En prenant la trace, on trouve  $\text{Tr}(kB^k) = 0$ , donc  $B^k$  est de trace nulle pour tout  $k \geq 1$ , donc  $B$  est nilpotente d'après la question (2) de l'exercice 2.

**Exercice 16.**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ . On suppose que tout élément de  $F$  est nilpotent. On note  $S_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

- (1) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, et toute matrice diagonalisable et nilpotente est nulle.
- (2) L'espace des matrices symétriques est de dimension  $n(n+1)/2$ , donc  $\dim(F) \leq n^2 - \dim(S_n(\mathbb{R})) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ .
- (3) On prend pour  $F$  le sous-espace engendré par les matrices qui ont un 1 quelque part au-dessus de la diagonale et des zéros partout ailleurs.

**Exercice 17.**

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs de  $A$  ou  $B$  (avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ) et, pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on note  $m_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$  comme valeur propre de  $A$  moins la multiplicité de  $\lambda_i$  comme valeur propre de  $B$ . Pour tout entier  $j \geq 0$ , on a  $\text{Tr}(A^j) - \text{Tr}(B^j) = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i^j = 0$ . Cela donne  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_k)(m_1, \dots, m_k) = (0, \dots, 0)$  où  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  est une matrice de Vandermonde inversible (puisque  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ), d'où  $(m_1, \dots, m_k) = (0, \dots, 0)$ . Ainsi,  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres avec même multiplicités. Comme de plus  $A$  et  $B$  sont diagonalisables, elles sont semblables.