Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Feuille de TD numéro 8 : décomposition de Dunford

Exercice 1. Calculer la décomposition de Dunford des matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Étant donné $a, b \in K^*$, calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) On note I la matrice identité de $M_4(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Im}(A - 2I) \subset \mathrm{Ker}((A - I)^3)$.

(2) Montrer que $\mathrm{Im}(A - 2I) = \mathrm{Ker}((A - I)^3)$.

(3) Donner une base des espaces caractéristiques de A.

(4) Calculer la décomposition de Dunford de A.

Exercice 4.

Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Calculer la décomposition de Dunford puis l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$.

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, et soit $m \geq 1$ un entier tel que $N^m = 0$.

(1) Rappeler pourquoi 0 est la seule valeur propre de N.

(2) Montrer que $\det(I + N) = 1$ et en déduire que $I + N$ est inversible.

(3) Montrer que l'inverse de $I + N$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} (-N)^k$.

On considère maintenant une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, et on note $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. On suppose que D est inversible.

(4) Montrer que la matrice $D^{-1}N$ est nilpotente.

(5) Montrer que $\det(A) = \det(D)$, et en déduire que A est inversible.

(6) En utilisant la question (3), exprimer l'inverse de A en fonction de D et de N.

Exercice 7.

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geq 1$. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dit stable par u si $u(F) \subset F$.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ pour tout entier k.

(2) Montrer que si $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ pour un entier k, alors $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^{k+2})$.

(3) Dans cette question, on suppose que u est d'indice de nilpotence égal à n.

(a) Montrer que les inclusions $\mathrm{Ker}(u^0) \subset \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u^n)$ sont strictes.

(b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u^k)$ est de dimension k pour tout $0 \leq k \leq n$.

(c) Soit $0 \leq k \leq n$ un entier. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^k)$ est l'unique sous-espace vectoriel de E qui est de dimension k et stable par u (*indication :* si F est un sous-espace vectoriel stable par u, on pourra considérer la restriction $u_{|F}$).

(4) Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1,
2. l'indice de nilpotence de u est égal à n,

3. il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par u.

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$P_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on pose

$$P_i(X) = (-1)^n \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}.$$

On note π_i l'endomorphisme de E défini par $\pi_i(x) = x_i$ où $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in E_{(\lambda_i)}(u)$ (cet endomorphisme est appelé projecteur spectral de u associé à λ_i).

(1) Démontrer qu'il existe des polynômes $Q_1, \ldots, Q_r$ tels que $Q_1 P_1 + \cdots + Q_r P_r = 1$.

(2) Démontrer que $\pi_i = Q_i P_i(u)$. En particulier, π_i est un polynôme en u.

(3) En déduire que les endomorphimes d et n de la décomposition de Dunford de u sont des polynômes en u.

(4) Calculer la décomposition de Dunford (D, N) de la matrice A suivante, et exprimer D et N comme des polynômes en A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.

(1) L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$?

(2) Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ (pour la topologie naturelle).

(3) Montrer que l'application $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ qui associe à A la matrice diagonalisable de sa décomposition de Dunford n'est pas continue.