Sorbonne Université, Algèbre 2, année 2025-2026

Corrigé de la feuille de TD numéro 8

Exercice 1.

Un calcul donne $P_A(X) = (X-2)^2$, donc $A-2I$ est nilpotente par le théorème de Cayley-Hamilton. La décomposition de Dunford de A est donc $(2I, A-2I)$.

La matrice B est de taille 2 et elle possède (clairement) deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. Ainsi, sa décomposition de Dunford est $(B, 0)$.

Exercice 2.

On a $A = D + N$ avec $D = I$ et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Clairement D est diagonalisable, N est nilpotente, et D et N commutent. C'est donc la décomposition de Dunford.

La matrice B est diagonalisable.

Pour la matrice C, on a $C = D + N$ avec $D = I$ et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on voit comme pour la matrice A que c'est la décomposition de Dunford.

Pour la matrice D, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par $v_1 = e_1$, celui associé à la valeur propre 2 par $v_2 = ae_1 + e_2$. L'espace caractéristique associé à la valeur propre 1 est engendré par v_1 et $w_1 = -be_2 + e_3$. La partie diagonalisable D de A est donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab/2 \\ 0 & 2 & b/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la partie nilpotente est

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab/2 \\ 0 & 0 & b/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

(1) On voit facilement que $P_A(X) = (X-1)^3(X-2)$. Par le théorème de Cayley-Hamilton on a $P_A(A) = 0$, donc $(A-I)^3(A-2I) = 0$. Montrons que l'image de $A-2I$ est contenue dans $\mathrm{Ker}((A-I)^3)$: soit $y \in \mathrm{Im}(A-2I)$, il existe (par définition de l'image) un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $y = (A-2I)x$, donc $(A-I)^3 y = (A-I)^3(A-2I)x = 0x = 0$, donc y appartient à $\mathrm{Ker}((A-I)^3)$.

(2) $\mathrm{Ker}((A-I)^3)$ est de dimension 3 car c'est le sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre 1, qui est de multiplicité algébrique 3. D'autre part, on a :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est clairement de rang 3, donc $\mathrm{Im}(A-2I)$ est de dimension 3, donc $\mathrm{Im}(A-2I) = \mathrm{Ker}((A-I)^3)$ puisqu'on a une inclusion et égalité des dimensions.

(3) Pour avoir une base de l'espace caractéristique $E_{(1)}(A) = \mathrm{Ker}((A-I)^3)$, il suffit, en vertu de la question précédente, de choisir trois vecteurs linéairement indépendants dans $\mathrm{Im}(A-2I)$. On peut prendre $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$ et $v_3 = (0,0,1,0)$.
Pour avoir une base de l'espace caractéristique $E_{(2)}(A) = \mathrm{Ker}(A-2I)$, il suffit de choisir un vecteur non nul dans le noyau de $A-2I$ puisque cet espace est de dimension 1. On peut prendre par exemple $v_4 = (4,2,1,1)$.

(4) Ici on peut procéder de deux façons (au moins).

Première méthode : on peut écrire la matrice de passage P de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) vers la base (v_1, v_2, v_3, v_4) (c'est-à-dire la matrice P dont les colonnes sont les v_i, ou encore telle que $Pe_i = v_i$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$). On a alors :

$$D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ puis } N = A - D.$$

Seconde méthode : on note d l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $d(v_1) = v_1$, $d(v_2) = v_2$, $d(v_3) = v_3$ et $d(v_4) = 2v_4$. La matrice D que l'on cherche est la matrice de d dans la base canonique. On calcule donc $d(e_i)$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$. On trouve $d(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et $d(e_4) = 4e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4$. On trouve donc (un peu plus explicitement qu'avec la première méthode) :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ puis } N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Un calcul donne $P_A(X) = -(X-3)^3$. En vertu du théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = 0$, donc $(A-3I)^3 = 0$. On pose $D = 3I$ et $N = A - 3I$. On a bien $A = D + N$. De plus, D est diagonalisable (et même diagonale), N est nilpotente (puisque $(A-3I)^3 = 0$) et $DN = ND$ (puisque D est une homothéthie donc commute avec toute matrice). La décomposition $D + N = A$ est donc bien la décomposition de Dunford de A.

On trouve de même $P_B(X) = -(X-3)^3$, et on procède exactement comme pour A.

Un calcul donne $P_D(X) = (X+3)^4$. Comme ci-dessus, on écrit $D = -3I + (D + 3I)$, et il s'agit de la décomposition de Dunford de D (la nilpotence de $D + 3I$ découle encore du théorème de Cayley-Hamilton).

Le cas de la matrice C est moins immédiat. On trouve $P_C(X) = -(X-3)^2(X-2)$, et la méthode utilisée pour trouver la décomposition de Dunford de A, B ou D ne s'applique plus ici. La méthode générale est la suivante, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de l'espace E considéré (ici $E = \mathbb{R}^3$).

1. On commence par déterminer si la matrice C est diagonalisable ou non. Si elle l'est, sa décomposition de Dunford est $C = C + 0$. Si elle ne l'est pas, on passe à l'étape ci-dessous.
2. On calcule une base de chaque espace caractéristique. On obtient une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de E.
3. Ensuite, on peut procéder de deux façons différentes.
   — Méthode 1 : on note $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. La matrice diagonalisable de la décomposition de Dunford de A est alors $PD'P^{-1}$ où D' est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans l'ordre correspondant à l'ordre choisi pour la base $\mathcal{B}'$). On note D cette matrice.
   — Méthode 2 : on note u l'endomorphisme de E tel que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et d l'endomorphisme diagonalisable de la décomposition de Dunford de u. On connaît l'action de d sur la base $\mathcal{B}'$ (car pour tout λ dans le spectre de A, d est l'homothétie de rapport λ sur l'espace caractéristique associé à λ), et on déduit l'action de d sur la base $\mathcal{B}$, ce qui fournit la matrice D recherchée.
4. Enfin, on calcule $N = A - D$. On vérifie que $DN = ND$ et que N est une matrice nilpotente.

Mettons en pratique la procédure ci-dessus dans le cas de la matrice C. Ici, on trouve $E_2(C) = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et on vérifie que $E_3(C)$ est de dimension 1. Par conséquent, C n'est pas diagonalisable. On a $E_{(2)}(C) = E_2(C)$ et $E_{(3)}(C) = \text{vect}(e_1, e_2)$ (pour éviter de calculer $(C - 3I_3)^2$, on peut remarquer que $(C - 3I_3)^2(C - 2I_3) = 0$ (en vertu du théorème de Cayley-Hamilton), donc que l'image de $C - 2I_3$ est contenue dans le noyau de $(C - 3I_3)^2$, qui n'est autre que $E_{(3)}(C)$; on obtient donc aisément une base de $E_{(3)}(C)$ en déterminant l'espace engendré par les colonnes de $C - 2I_3$). On pose $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$. La matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) vers (e'_1, e'_2, e'_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice D est donc $P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Pour aller au bout, il faudrait encore calculer P^{-1} et faire le produit des trois matrices. La seconde méthode est plus directe : $d(e'_1) = 3e'_1$, $d(e'_2) = 3e'_2$ et $d(e'_3) = 2e'_3$. On a donc $d(e_1) = 3e_1$, $d(e_2) = 3e_2$ et $d(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2 + e_3)$, d'où $d(e_3) = -e_1 - e_2 + 2e_3$. On trouve donc

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = C - D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'on a bien $DN = ND$ et que N est nilpotente (on a $N^2 = 0$).

Exercice 5.

On a $P_A(X) = -(X - 2)(X + 1)^2$. On trouve $E_2(A) = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et $E_{-1}(A) = \text{vect}(-2e_1 + e_2 + e_3, e_1 - 2e_2 + e_3)$. On note en particulier que $E_{-1}(A)$ est de dimension égale à la multiplicité algébrique de -1. La matrice A est donc diagonalisable. Par conséquent, sa décomposition de Dunford est $A = A+0$. On pose $e_1' = e_1+e_2+e_3, e_2' = -2e_1+e_2+e_3, e_3' = e_1-2e_2+e_3$ et on note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) vers la base (e_1', e_2', e_3'). On a $A = P\mathrm{diag}(2, -1, -1)P^{-1}$. On en déduit que $e^A = P\mathrm{diag}(e^2, e^{-1}, e^{-1})P^{-1}$.

On a $P_B(X) = (X-2)^2(X-1)^2$. On trouve ensuite $E_1(B) = \mathrm{vect}(e_1 - e_4)$ et $E_2(B) = \mathrm{vect}(3e_1+2e_2+e_3-2e_4)$. On pose $e_1' = e_1-e_4$ et $e_3' = 3e_1+2e_2+e_3-2e_4$. En particulier, les espaces propres $E_2(B)$ et $E_1(B)$ sont de dimension 1 (strictement inférieure à la multiplicité algébrique de chacune des deux valeurs propres), donc la matrice B n'est pas diagonalisable. Pour trouver une base de $E_{(1)}(B)$, on cherche un vecteur e_2' tel que $(B - I_4)e_2' = e_1'$, par exemple $e_2' = e_1 + e_2 + e_3$. De même, on trouve e_4' tel que $(B - 2I_4)e_4' = e_3'$ pour obtenir une base (e_3', e_4') de $E_{(2)}(B)$. On note P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3, e_4) vers la base (e_1', e_2', e_3', e_4'). La matrice D de la décomposition de Dunford de A est $D = P\mathrm{diag}(1, 1, 2, 2)P^{-1}$, et la partie nilpotente est $N = A - D$.

Comme $DN = ND$, on a $e^A = e^{D+N} = e^D e^N$. En notant $i \geq 1$ l'indice de nilpotence de N, on a :

$$e^N = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{k!} N^k.$$

D'autre part, on a $e^D = P\mathrm{diag}(e, e, e^2, e^2)P^{-1}$. On a donc :

$$e^A = P\mathrm{diag}(e, e, e^2, e^2)P^{-1} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{k!} N^k.$$

On procède la même façon pour C. On a $P_C(X) = (X-1)^3(X+1)$.

Exercice 6.

(1) Soit λ une valeur propre de N. Par définition, il existe un vecteur non nul v tel que $Nv = \lambda v$, d'où $N^m v = \lambda^m v = 0$ (par récurrence immédiate), donc $\lambda^m = \lambda = 0$ puisque $v \neq 0$.

(2) Comme toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, il existe une matrice inversible P telle que PNP^{-1} est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. Donc $P(I+N)P^{-1}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc $\det(P(I+N)P^{-1}) = 1$. Or $\det(P(I+N)P^{-1}) = \det((I+N)P^{-1}P) = \det(I+N)$, donc $\det(I+N) = 1$. En particulier, comme $\det(I+N)$ est non nul, $I+N$ est inversible.

(3) On fait le calcul :

$$(I+N)\sum_{k=0}^{m-1}(-N)^k = \sum_{k=0}^{m-1}(-N)^k - \sum_{k=0}^{m-1}(-N)^{k+1} = \sum_{k=0}^{m-1}(-N)^k - \sum_{k=1}^{m}(-N)^k = I - (-N)^m = I.$$

(4) On a $DN = ND$ (c'est une propriété de la décomposition de Dunford), donc $ND^{-1} = D^{-1}N$, donc $(D^{-1}N)^m = D^{-m}N^m = D^{-m}0 = 0$.

(5) On a $\det(A) = \det(D+N) = \det(D(I+D^{-1}N)) = \det(D)\det(I+D^{-1}N)$. Or $D^{-1}N$ est nilpotente d'après la question (4), donc $\det(I+D^{-1}N) = 1$ d'après la question (2). Donc $\det(A) = \det(D)$. En particulier $\det(A) \neq 0$, donc A est inversible.

(6) On écrit $A = D(I + D^{-1}N)$. D'après la question (3), on a donc :

$$A^{-1} = (I + D^{-1}N)^{-1}D^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1}(-D^{-1}N)^k D^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} D^{-(k+1)}(-N)^k.$$

Exercice 7.

(1) Si $u^k(x) = 0$ alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$.

(2) Il suffit de démontrer que $\mathrm{Ker}(u^{k+2})$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$. Soit $x \in E$ tel que $u^{k+2}(x) = 0$, alors $u(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u^{k+1})$, qui est égal à $\mathrm{Ker}(u^k)$ par hypothèse. Donc $u^k(u(x)) = 0$, d'où $u^{k+1}(x) = 0$.

(3.a) Si $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ pour un certain entier $k < n$ alors, d'après la question (2), on a $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^n) = E$. Donc $u^k = 0$ avec $k < n$, ce qui contredit l'hypothèse sur l'indice de nilpotence de u.

(3.b) On déduit de la question précédente que la suite (finie) $(\dim(\mathrm{Ker}(u^k))_{0\leq k\leq n}$ est strictement croissante. Or $\dim(\mathrm{Ker}(u^0)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u^n)) = n$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$ pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

(3.c) D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}(u^k)$ est de dimension k. De plus, $\mathrm{Ker}(u^k)$ est clairement stable par u. Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k et stable par u. L'endomorphisme $u_{|F}$ est nilpotent (puisque u est nilpotent). De plus, son indice de nilpotence est au plus la dimension de l'espace sous-jacent, donc $u_{|F}^k = 0$. On en déduit que $u^k(F) = \{0\}$, et donc que $F \subset \mathrm{Ker}(u^k)$. Par égalité des dimensions, on a bien $F = \mathrm{Ker}(u^k)$.

(4) Si $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1 alors il y a un unique bloc de Jordan dans la forme normale de Jordan de u, donc u est bien nilpotent d'indice n, ce qui prouve $1 \implies 2$. Si u est nilpotent d'indice n, alors il y a exactement $n + 1$ sous-espaces stables par u d'après la question (3), ce qui démontre $2 \implies 3$. Enfin, on démontre $3 \implies 1$ par contraposition (autrement dit, on démontre non $1 \implies$ non 3) : si $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension au moins 2, alors il y a une infinité de droites vectorielles contenues dans $\mathrm{Ker}(u)$; or, toute telle droite est stable par u.

Exercice 8.

(1) Les polynômes $P_1, \dots, P_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. On applique Bezout.

(2) En évaluant l'identié de la question (1) en u, on obtient $Q_1(u)P_1(u)+\cdots+Q_r(u)P_r(u) = \mathrm{id}$. Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_r$ avec $x_i \in E_{(\lambda_i)}(u)$. Pour $j \neq i$, on a $P_j(u)(x_i) = 0$. Ainsi, $Q_i(u)P_i(u)(x) = x_i$, donc $\pi_i = Q_i(u)P_i(u)$. En particulier, π_i est un polynôme en u.

(3) Dans la décomposition de Dunford $u = d + n$ avec d diagonalisable et n nilpotent, on a $d = \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i$. Or chaque π_i est un polynôme en u, donc d est un polynôme en u. Par conséquent $n = u - d$ est également un polynôme en u.

(4) Un calcul donne $P_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$. Les valeurs propres sont 1 et 2 (de multiplicité 2). On vérifie que $E_2(A)$ est de dimension 1, donc la matrice A n'est pas diagonalisable. On trouve une relation de Bezout entre $X - 1$ et $(X-2)^2$: $(3-X)(X-1) + (X-2)^2 = 1$. On peut donc écrire $D = 2(3I - A)(A - I) + (A - 2I)^2 = -A^2 + 4A - 2I$ et $N = D - A$.

Exercice 9.

(1) Non, cet ensemble n'est pas stable par addition.

(2) Les matrices ayant n valeurs propres distinctes sont diagonalisables, et toute matrice A est limite d'une suite de telles matrices (quitte à trigonaliser, on peut supposer que A

est triangulaire supérieure et ajouter des termes tendant vers 0 sur la diagonale de façon à avoir n valeurs propres distinctes).

(3) Considérons la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sa décomposition de Dunford est $D = I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$.
Pour $\varepsilon \neq 0$, les valeurs propres sont distinctes, donc A_ε est diagonalisable et $\varphi(A_\varepsilon) = A_\varepsilon$. Mais $\varphi(A) = I$. Or $A_\varepsilon \to A$ lorsque $\varepsilon \to 0$ mais $\varphi(A_\varepsilon) \not\to \varphi(A)$. L'application φ n'est donc pas continue.