

**Exercice 1.**

(1) Combien y a-t-il de formes normales de Jordan possibles pour une matrice nilpotente de  $M_5(\mathbb{C})$  ?

(2) Soit  $A \in M_5(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente telle que  $\text{Ker}(A)$  est de dimension 3 et  $A^2 = 0$ . Quelle est sa forme normale de Jordan ?

**Exercice 2.**

On considère un polynôme  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} - \dots + a_1X + a_0$  à coefficients complexes et la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

On rappelle (voir feuille de TD 7) que  $\chi_A(X) = \det(XI - A) = P(X)$  et que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une racine de  $P$ , l'espace propre  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$  est de dimension 1. Déterminer la forme normale de Jordan de  $A$ .

**Exercice 3.**

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et déterminer ses racines.

(2) Pour chaque racine  $\lambda$ , déterminer une base de  $\text{Ker}((A - \lambda I_4)^i)$ , pour  $i \in \mathbb{N}^*$ .

(3) Déterminer une base de  $\mathbb{R}^4$  donnant la forme normale de Jordan de  $A$ .

**Exercice 4.**

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et déterminer ses racines.

- (2) Pour chaque racine  $\lambda$ , déterminer une base de  $\text{Ker}((A - \lambda I_4)^i)$ , pour  $i \in \mathbb{N}^*$ .
- (3) Déterminer une base de  $\mathbb{R}^4$  donnant la forme normale de Jordan de  $A$ .

**Exercice 5.**

Soient  $r \geq 1, n \geq 2$  deux entiers, soit  $K$  un corps. Une racine  $n$ ième d'une matrice  $A \in M_r(K)$  est une matrice  $B \in M_r(K)$  telle que  $B^n = A$ .

- (1) Montrer que toute matrice  $A \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$  admet une racine  $n$ ième.
- (2) Pour tout entier  $r \geq 2$ , donner un exemple de matrice  $A \in M_r(\mathbb{C})$  qui n'admet pas de racine carrée.
- (3) Pour tout  $r \geq 2$ , donner un exemple de matrice  $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$  qui n'admet pas de racine carrée.

**Exercice 6.**

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

- (1) Déterminer les espaces propres, caractéristiques, la décomposition de Dunford et la forme normale de Jordan de  $A$ .
- (2) Calculer l'exponentielle de  $A$ .
- (3) Trouver l'unique fonction différentiable  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  telle que  $x(0) = e_1$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x'(t) = Ax(t)$ .

**Exercice 7.**

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Trouver l'unique fonction différentiable  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  telle que  $x(0) = (1, 1, 1, 1)$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x'(t) = Ax(t)$ .

**Exercice 8.**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice telle que  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$ .

- (1) Montrer que  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Ker}(A)$  sont en somme directe.
- (2) Montrer que l'application  $\text{Im}(A) \rightarrow \text{Im}(A)$ ,  $x \mapsto Ax$  est un isomorphisme.
- (3) Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle la matrice de l'application linéaire  $x \mapsto Ax$  est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' \in \text{GL}_r(\mathbb{C}).$$

- (4) Soit  $N \geq 1$  un entier. Démontrer qu'il existe une matrice  $B \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $B^N = A$ .