

Corrigé de la feuille de TD numéro 9

**Exercice 1.**

(1) Il suffit de compter les  $r$ -uplets  $(p_1, \dots, p_r)$  avec  $r \geq 1$ ,  $p_1 + \dots + p_r = 5$  et  $p_1 \geq \dots \geq p_r$ . En voici la liste :  $(5)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1)$ . Il y a donc sept formes normales de Jordan possibles pour un endomorphisme nilpotent en dimension 5.

(2) La dimension du noyau est égale au nombre de blocs (l'entier  $r$  ci-dessus). Les uplets possibles sont donc  $(3, 1, 1)$  et  $(2, 2, 1)$ . Or  $A^2 = 0$ , donc la forme normale de Jordan de  $A$  est donnée par l'uplet  $(2, 2, 1)$ ; autrement dit, c'est la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.**

Pour une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $i \geq 1$  soit  $d_i = \dim(A - \lambda)^i$  et, pour  $i \geq 1$ ,

$$q_i = d_i - d_{i-1}.$$

On a  $q_1 \geq \dots \geq q_m$  et  $q_1 + \dots + q_m = m$  où  $m$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda$ . On a alors forcément  $q_1 = \dots = q_m = 1$ . Donc le bloc de Jordan de  $\lambda$  est  $\lambda +_m + J_m$ .

**Exercice 3.**

(1) Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $P_A(X) = (X + 1)^2(X - 2)^2$ . Les valeurs propres sont  $-1$  et  $2$ , toutes les deux de multiplicité algébrique 2.

(2) Pour  $\lambda = 2$  l'espace propre est de dimension 1 et engendré par  $(0, 1, 1, 0)$ . Le noyau de

$$(A - 2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ 9 & 9 & -9 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est engendré par  $(0, 1, 1, 0)$  et  $e_4$ .

Pour  $\lambda = -1$  l'espace propre est de dimension 1 et engendré par  $(1, 0, 1, 0)$ . Le noyau de

$$(A + 1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 9 & 6 \\ -9 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

est engendré par  $(1, 0, 1, 0)$  et  $e_2$ .

(3) Le vecteur  $v_2 = e_4$  appartient à l'espace caractéristique pour la valeur propre 2 mais pas à l'espace propre ; on pose  $v_1 = (A - 2I_4)e_4 = (0, 1, 1, 0)$ . Le vecteur  $v_4 = e_2$  appartient à l'espace caractéristique pour la valeur propre  $-1$  mais pas à l'espace propre ; on pose  $v_3 = (A + 1)e_2 = (1, 0, 1, 0)$ . Dans la base  $v_1, \dots, v_4$  la matrice de  $A$  est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.**

(1) Un calcul donne  $P_A(X) = (X - 2)^4$ .

(2) On a  $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $e_1, e_2, e_3, e_4$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . On trouve  $\ker(A - 2I_4) = \text{vect}(e_1 + e_4)$ . Comme cet espace est de dimension 1, il y a un unique bloc dans la forme normale de Jordan de  $A - 2I_4$ , donc  $\ker((A - 2I_4)^i)$  est de dimension  $i$  pour tout  $0 \leq i \leq 4$  (et de dimension 4 pour tout  $i \geq 5$ ).

Pour trouver une base de  $\ker((A - 2I_4)^2)$ , on note  $v_1 = e_1 + e_4$  un vecteur directeur de  $\ker(A - 2I_4)$ , et on cherche  $v_2$  tel que  $(A - 2I_4)v_2 = v_1$ . La famille  $(v_1, v_2)$  sera alors une famille libre de  $\ker((A - 2I_4)^2)$ , donc une base de cet espace puisque ce dernier est de dimension 2. On peut prendre par exemple  $v_2 = (e_2 + e_3)/2$  (par un calcul, ou bien en regardant les colonnes de la matrice  $A - 2I_4$  et en observant que la somme des colonnes 2 et 3 de cette matrice est égale à deux fois le vecteur  $v_1$ ).

Pour trouver une base de  $\ker((A - 2I_4)^3)$ , on itère cette opération : on cherche un vecteur  $v_3$  tel que  $(A - 2I_4)v_3 = v_2$ . On peut prendre  $v_3 = (e_3 - e_2)/4$ . La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\ker((A - 2I_4)^3)$ .

Enfin, on cherche un vecteur  $v_4$  tel que  $(A - 2I_4)v_4 = v_3$ , par exemple

$$v_4 = \frac{1}{8}(2e_1 + e_2 + e_3).$$

La famille  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une base de  $\ker((A - 2I_4)^4) = \mathbb{R}^4$  dans laquelle la matrice de l'endomorphisme  $u$  dont la matrice est  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  est sous forme normale de Jordan.

(3) On note  $P$  la matrice de passage de  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  vers  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , c'est-à-dire

$$P = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.**

(1) Puisque  $A$  est inversible on peut écrire  $A = \exp(M)$  pour une certaine matrice  $M \in M_r(\mathbb{C})$ , donc  $B = \exp(\frac{1}{n}M)$  convient.

(2) Le bloc de Jordan  $J = J_r$  n'admet pas de racine carrée. En effet, une telle matrice  $A$  serait nilpotente d'indice de nilpotence  $2r$ , mais l'indice de nilpotence est  $\leq r$ .

(3) Il suffit de prendre une matrice  $A$  de déterminant  $< 0$ . En effet, si  $A = B^2$  on a  $\det A = (\det B)^2 \geq 0$ .

**Exercice 6.**

(1) On trouve  $E_2(A) = \ker(A - 2I_4) = \text{vect}(v_1, v_2)$  où  $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$  et  $v_2 = 2e_2 + e_4$ . On a donc  $E_2(A) = E_{(2)}(A)$ . En revanche,  $E_{-2}(A) = \ker(A + 2I_4)$  est de dimension 1, engendré par  $v_3 = -e_1 + e_3$ . On cherche  $v_4$  tel que  $(A + 2I_4)v_4 = v_3$ , par exemple  $v_4 = e_2/2$ . Ainsi,  $E_{(-2)}(A) = \text{vect}(v_3, v_4)$ .

On pose  $P$  la matrice de passage de la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  vers  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ . La forme normale de Jordan de  $A$  est :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$D = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et

$$N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Le couple  $(D, N)$  est la décomposition de Dunford de  $A$ .

(2) L'exponentielle de  $A$  est donc de la forme suivante, en utilisant le fait que  $e^N = I_4 + N$  (car  $N^2 = 0$ ) :

$$e^A = e^D e^N = P \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} & e^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(3) Enfin, la solution du système  $x'(t) = Ax(t)$  est  $x(t) = e^{At}x_0$ , où  $e^{At}$  est de la forme suivante, en utilisant le fait que  $e^{Nt} = I_4 + Nt$  (car  $N^2 = 0$ ) :

$$e^{At} = e^{Dt}e^{Nt} = P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$P \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Exercice 7.**

Le noyau est de dimension 2 et engendré par

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On voit alors  $v = (1, 1, 1, 1)$  appartient au noyau de  $A$ . En particulier l'unique solution de l'équation différentielle  $x' = Ax$  avec  $x(0) = v$  est  $x(t) = e^{tA}v = v$ .

**Exercice 8.**

(1) Par le théorème du rang on a  $\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im}(A) = n$  donc il suffit de montrer  $\text{Ker} A \cap \text{Im}(A) = 0$ . Soit  $x \in \text{Ker} A \cap \text{Im}(A)$ . Alors il existe  $y \in \mathbb{C}^n$  tel que  $Ay = x$  et  $Ax = A^2y = 0$ . Puisque  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^2)$  on a  $x = Ay = 0$ .

(2) D'après (1) l'image de  $\mathbb{C}^n$  par  $A$  coïncide avec l'image de  $\text{Im}(A)$  par  $A$ .

(3) Il suffit de prendre une base  $v_1, \dots, v_r$  de  $\text{Im}(A)$  où  $r$  est le rang de  $A$  et de la compléter avec une base  $v_{r+1}, \dots, v_n$  de  $\text{Ker}(A)$ .

(4) Par la surjectivité de l'exponentielle  $M_r(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$  on peut écrire  $A' = \exp(M)$ . Si on pose  $B' = \exp(\frac{1}{2}M)$  on a alors  $B'^2 = A'$  et finalement  $B^2 = A$  avec

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$