3MA262
Licence de mathématiques
Année académique 2023-2024

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Devoir sur table

Sujet

Exercice 1

1. Factoriser l'entier 2025, vérifier que c'est un carré et en déduire la factorisation de 2025.
2. Quels sont les ordres possibles des éléments du groupe $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$?
3. Déterminer l'ordre, la structure, puis l'exposant du groupe $(\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z})^\times$. Quels sont les ordres possibles de ses éléments ?
4. Combien d'éléments de $(\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z})^\times$ sont d'ordre 2 ?

Exercice 2 – Montrer qu'étant donnés deux entiers naturels a et n, on a l'identité

$$(a^n - 1, (a-1)^2) = (a-1)(a-1, n).$$

Exercice 3 – Soit $b > 1$ un entier. Étant donné un entier naturel non nul n, considérons son écriture

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_r b^r$$

en base b et posons

$$\rho(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_r.$$

1. Vérifier que l'on a la congruence $\rho(n) \equiv n \pmod{b-1}$.
2. Montrer que $\rho(n)$ est strictement positif, que l'on a l'inégalité $\rho(n) < n$ pour $n \geq b$ et l'égalité $\rho(n) = n$ pour $n < b$.
3. En déduire que la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ définie par $u_0 = n$ et $u_{k+1} = \rho(u_k)$ est ultimement stationnaire (i.e. stationnaire à partir d'un certain rang) et déterminer sa limite.