4MA235

Master de mathématiques
Année académique 2025-2026

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Feuille d'exercices 1

Énoncés

Exercice 1 (Applications de l'écriture en base b)

1. Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme tel que ses coefficients soient tous des entiers naturels. Montrer que la connaissance de $f(1)$ et $f(m)$, avec $m > f(1)$ permet de déterminer (les coefficients de) f. Déterminer explicitement f lorsque $f(1) = 10$ et $f(15) = 2026$.
2. Notons $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que l'application $f : \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par
$$f(X) = \sum_{n \in X} 2^n$$
est bijective.

Exercice 2 (Une application de la factorisation unique) – L'ensemble $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est muni d'une structure naturelle de groupe abélien : étant données $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le ***support*** de $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble

$$\operatorname{Supp}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 0\}.$$

Nous dirons que f est ***à support fini*** si $\operatorname{Supp}(f)$ est un ensemble fini. Notons $\mathbb{Z}_0^{\mathbb{N}}$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ des applications à support fini. Vérifier que $\mathbb{Z}_0^{\mathbb{N}}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et montrer qu'il est isomorphe au groupe (multiplicatif) $\mathbb{Q}_{>0}^{\times}$ des rationnels strictement positifs.

Exercice 3 (Écriture en base $-b$) – Considérons un entier naturel $b > 1$.

1. Montrer qu'un entier $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit de manière unique comme
$$n = \sum_{k \geq 0} a_k (-b)^k,$$
où les entiers $a_0, \ldots, a_k \in \{0, \ldots, n-1\}$ sont presque tous nuls, i.e. nuls à partir d'un certain rang. Une telle expression est ***l'écriture de n en base $-b$***. On écrira alors $n = (a_k \cdots a_0)_{-b}$.

2. Décrire un algorithme permettant de déterminer l'écriture en base $-b$ d'un entier.
3. Déterminer l'écriture de 2026 en base -10.
4. Soit n un entier et considérons son écriture $n = \sum_k a_k(-b)^k$ en base $-b$. Notons k le plus grand entier naturel tel que $a_k \neq 0$. Vérifier que l'on a l'inégalité

$$k \leq \log_b(|n|) + 2.$$

5. Étant donné un entier $n = \sum_k a_k(-b)^k$, posons $f(n) = \sum_n a_k b^k$. On définit ainsi une application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que f est bijective.

Exercice 4 – Déterminer tous les entiers n tels que

$$(n^3 + 3) \wedge (n^2 + n + 2) = 16.$$

Exercice 5 (Produit fibré et théorème des restes chinois) – Ce long exercice consititue une bonne révision des notions d'algèbre qui seront utilisées dans le cours. Son objectif est de fournir une démonstration du célèbre ***théorème des restes chinois*** dans une formulation générale.

Considérons trois ensembles X, Y et S ainsi que deux applications $f : X \to S$ et $g : Y \to S$. L'ensemble

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

est le ***produit fibré*** de X et Y au dessus de S. Dans la suite, nous supposerons X, Y et S non vides.

1. Montrer que $X \times_S Y = \emptyset$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \emptyset$ et que $X \times_S Y = X \times Y$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ est un singleton.
2. Considérons les applications $\pi_1 : X \times_S Y \to X$ et $\pi_2 : X \times_S Y \to Y$ définies par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$. Montrer que π_1 est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. De même π_2 est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$. En particulier π_1 et π_2 sont toutes deux surjectives si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

On suppose désormais que X, Y et S sont des groupes et que les applications f et g sont des homomorphismes surjectifs de groupes. Dans la suite, on se restreint au cas où f et g sont surjectifs. Dans cette situation, les applications π_1 et π_2 sont surjectives (cf. le point ci-dessus).

3. Vérifier que $X \times_S Y$ est un sous-groupe de $X \times Y$, qu'il contient $\ker(f) \times \ker(g)$, que les applications π_1 et π_2 sont des homomorphismes de groupes et que l'on a les identités $\ker(\pi_1) = 1 \times \ker(g)$ et $\ker(\pi_2) = \ker(f) \times 1$.
4. On suppose X, Y et S finis. Justifier le fait que $X \times_S Y$ est fini et montrer que l'on a l'indentité

$$|S| \cdot |X \times_S Y| = |X| \cdot |Y|.$$

5. Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G. Dans la suite, on pose $X = G/H$ et $Y = G/K$. On a alors des homomorphismes surjectifs canoniques $u : G \to X$ et $v : G \to Y$ et l'on peut donc considérer le produit fibré $X \times_S Y$.
   (a) Vérifier que l'ensemble

   $$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

   est un sous-groupe distingué de G et que c'est le plus petit sous-groupe contenant $H \cup K$. En posant $S = G/HK$, on a alors des homomorphismes canoniques surjectifs de groupes $f : X \to S$ et $g : Y \to S$ et l'on peut donc considérer le produit fibré $X \times_S Y$.
   (b) Considérons l'homomorphisme de groupes $h : G \to X \times Y$ défini par $h(x) = (u(x), v(x))$. décrire son noyau et montrer que son image coïncide avec $X \times_S Y$. En déduire le ***théorème des restes chinois pour les groupes***, qui affirme que les groupes $X \times_S Y$ et $G/H \cap K$ sont isomorphes. En particulier, pour $G = HK$, on en déduit un isomorphisme entre $X \times Y$ et $G/H \cap K$.

(c) Nous dirons que deux éléments $x, y \in G$ sont ***congrus modulo*** H si $xy^{-1} \in H$, ce qui revient à affirmer que x et y définissent le même élément de X. On écrit alors $x \equiv y \pmod{H}$. Étant donnés $a, b \in G$, on s'intéresse à l'existence d'un élément $x \in G$ tel que

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{H}, \\ \\ x \equiv b \pmod{K}. \end{cases}$$

Déduire du point précédent qu'un tel élément existe si et seulement si a et b sont congrus modulo HK et qu'il est alors unique modulo $H \cap K$. En particulier, pour $G = HK$, une solution existe toujours.

On suppose finalement que X, Y et S sont des anneaux et que les applications f er g sont des homomorphismes d'anneaux.

8. Vérifier que $X \times_S Y$ est un sous-anneau de $X \times Y$.
9. Considérons deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un anneau A. Posons $X = A/\mathfrak{a}, Y = A/\mathfrak{b}$ et $S = A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$. On a alors des homomorphismes canoniques $f : X \to S$ et $g : Y \to S$. Montrer le ***théorème des restes chinois pour les anneaux***, qui affirme que les anneaux $X \times_S Y$ et $A/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ sont isomorphes.
10. Avec les hypothèses et notations du point précédent, étant donnés $a, b \in A$, montrer que le système de congruences
$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{\mathfrak{a}}, \\ \\ x \equiv b \pmod{\mathfrak{b}} \end{cases}$$
admet une solution si et seulement si a est congru à b modulo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, auquel cas la solution est unique modulo $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.
11. Deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de A sont ***étrangers*** si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$, ce qui se traduit par l'existence de deux éléments $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in \mathfrak{b}$ vérifiant la relation $a + b = 1$, appelée ***identité de Bézout***. Montrer que dans ce cas, on a l'identité $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.
12. Montrer que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux étrangers d'un anneau A alors les anneaux $A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{b}$ et $A/\mathfrak{ab}$ sont isomorphes. Dans ce cas, le système de congruences du point 10 admet toujours une solution, qui est unique modulo $\mathfrak{ab}$. C'est sous cette forme qu'est généralement énoncé le théorème des restes chinois.