Une conséquence d'une identité algébrique en algèbre (multi-)linéaire

Leonardo Zapponi

Résumé. — Étant donnée une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique différente de 2, on lui associe une forme quadratique et un résultat classique affirme que la donnée de cette dernière détermine complètement la forme bilinéaire initiale. Dans cette courte note, nous généralisons ce résultat de manière explicite pour toute forme multilinéaire.

1. Une identité générale

Soit n un entier naturel et considérons l'anneau de polynômes $R = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Pour tout sous-ensemble I de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, posons

$$x_I = \sum_{i \in I} x_i.$$

Lemme 1. — *Dans l'anneau R, on a l'identité*

$$(-1)^n n! x_1 \cdots x_n = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\mathrm{card}(I)} x_I^n.$$

Démonstration. — Le terme de droite de l'identité de l'énoncé est une combinaison linéaire de monômes du type

$$y = \prod_{j \in J} x_j^{e_j},$$

où J est un sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, n\}$ et, pour tout $j \in J$, les entiers e_j sont strictement positifs et vérifient l'identité

$$\sum_{j \in J} e_j = n.$$

Étant donné un sous-ensemble I de $\{1,\dots,n\}$, un tel monôme apparaît dans le développement de x_I^n si et seulement si J est contenu dans I et son coefficient est alors égal à

$$\frac{n!}{\prod_{j\in J} e_j!},$$

qui ne dépend que de J. En notant r le cardinal de J, pour tout entier i appartenant à $\{r,\dots,n\}$ il existe exactement $\binom{n-r}{i-r}$ sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal i contenant J. On en déduit donc que le coefficient de y est égal à

$$\begin{aligned}\sum_{i=r}^{n}(-1)^i\binom{n-r}{i-r}\frac{n!}{\prod_{j\in J} e_j!} &= \frac{n!}{\prod_{j\in J} e_j!}\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^{i+r}\binom{n-r}{i} = \\ &= \frac{(-1)^r n!}{\prod_{j\in J} e_j!}\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^{i}\binom{n-r}{i} = \\ &= \frac{(-1)^r n!}{\prod_{j\in J} e_j!}(1-1)^{n-r} = \begin{cases}(-1)^n n! & \text{pour } r=n,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}\end{aligned}$$

et le résultat découle directement de ces dernières identités en remarquant que le cas $r=n$ ne se réalise que pour $J=\{1,\dots,n\}$, auquel cas on a la relation $y=x_1\cdots x_n$. $\square$

D'après la propriété universelle des anneaux de polynômes, l'identité du lemme ci-dessus reste valable en considérant des éléments quelconques $x_1,\dots,x_n$ d'un anneau commutatif A.

Exemple 2. — Pour $n=2$ on retrouve la classique identité

$$2ab=(a+b)^2-a^2-b^2$$

et, pour $n=3$, on obtient l'expression

$$6abc=(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3+a^3+b^3+c^3.$$

2. Une application en algèbre (multi-)linéaire

Fixons maintenant un corps K et un K-espace vectoriel V. Notons

$$T(V)=\bigoplus_n V^{\otimes n}$$

l'algèbre tensorielle de V et par

$$S(V)=\bigoplus_n S^n(V)$$

son algèbre symétrique, qui est une K-algèbre commutative, quotient de $T(V)$ par rapport à l'idéal bilatère engendré par les éléments du type $u\otimes v-v\otimes u$, avec $u,v\in V$. Dans la suite, on notera $v_1\cdots v_n$ l'image dans $S(V)$ de l'élément $v_1\otimes\cdots\otimes v_n$. Si V est de dimension finie d, le K-espace vectoriel $S^n(V)$ est de dimension $\binom{n+d-1}{n}$. La donnée d'une forme n-linéaire symétrique $b : V^n \to K$ est équivalente à la donnée d'une forme linéaire $\lambda : S^n(V) \to K$ et on a l'identité

$$b(v_1, \dots, v_n) = \lambda(v_1 \cdots v_n).$$

En généralisant la construction classique utilisée pour les formes quadratiques, on associe à b la forme homogène $q : V \to K$ de degré n définie par la relation

$$q(v) = b(v, \dots, v) = \lambda(v^n)$$

Proposition 3. — *Si la caractéristique de K est nulle ou strictement supérieure à n alors la forme homogène q détermine complètement b. De manière plus précise, étant donnés des éléments $v_1, \dots, v_n$ de V, on a l'identité*

$$b(v_1, \dots, v_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\mathrm{card}(I)} q(v_I).$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de l'identité obtenue dans le paragraphe précédent : les hypothèses de l'énoncé impliquent que l'élément $n!$ est inversible dans K, ce qui amène aux relations

$$b(v_1, \dots, v_n) = \lambda(v_1 \cdots v_n) = \lambda \left(\frac{(-1)^n}{n!} \sum_I (-1)^{\mathrm{card}(I)} v_I^n \right) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_I (-1)^{\mathrm{card}(I)} \lambda(v_I^n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_I (-1)^{\mathrm{card}(I)} q(v_I).$$

□

Exemple 4. — En reprenant les exemples du paragraphe précédent, si q est la forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique b sur V, on retrouve l'expression usuelle

$$b(u, v) = \frac{1}{2} \left(q(u + v) - q(u) - q(v) \right).$$

De même, si q est la forme cubique associée à une forme trilinéaire symétrique sur V, on obtient l'identité

$$b(u, v, w) = \frac{1}{6} \left(q(u + v + w) - q(u + v) - q(v + w) - q(w + u) + q(u) + q(v) + q(w) \right),$$

---

26 mai 2019

LEONARDO ZAPPONI • *E-mail :* `leonardo.zapponi@imj-prg.fr`