Sur la notion de cardinal d'un sous-ensemble

Leonardo Zapponi

Résumé. — Cette note propose une notion de cardinal qui coïncide avec la définition usuelle dans le cas fini mais qui est strictement plus fine dans le cas infini.

1. Le cardinal d'un sous-ensemble

Dans la suite on note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties d'un ensemble I. Pour tout $J \in \mathcal{P}(I)$, soit $\bar{J}$ son complémentaire. On rappelle que eux ensembles sont *equipotents* s'il existe une application bijective de l'un dans l'autre. Étant donnés deux éléments J et K de $\mathcal{P}(I)$, on pose $J \sim_I K$ s'il existe une application bijective $f : I \to I$ telle que $f(J) = K$. On vérifie facilement que $J \sim_I K$ si et seulement si J est équipotent à K et $\bar{J}$ est équipotent à $\bar{K}$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(I)$ qui coïncide avec l'usuelle relation d'équipotence lorsque I est fini mais qui est strictement plus fine lorsque I est infini. Le quotient $C_I = \mathcal{P}(I)/\sim_I$ est l'*esemble des cardinaux* de I et on note

$$\mathcal{P}(I) \xrightarrow{\mathrm{card}_I} C_I$$

la projection canonique. L'élément $\mathrm{card}_I(J)$ est le *cardinal* de J (en tant que sous-ensemble de I). On remarquera que l'on a $J \sim_I K$ si et seulement si $\bar{J} \sim_I \bar{K}$. L'ensemble C_I est donc muni d'une involution et, pour tout $J \in \mathcal{P}(K)$, on a l'identité

$$\mathrm{card}_I(\bar{J}) = \overline{\mathrm{card}_I(J)}.$$

Exemple 1. — Si I est fini, de cardinal n, l'ensemble C_I s'identifie canoniquement avec $\{0, \ldots, n\}$ et on a l'identité $\bar{k} = n - k$. En particulier, l'involution possède un point fixe si et seulement si n est pair.

Le résultat ci-dessous montre que la notion de cardinal que nous venons d'introduire coïncide avec la définition usuelle pour les sous-ensembles finis de I.

Lemme 2. — *Soient J et K deux sous-ensembles d'un ensemble I, avec J fini. On a l'identité $\mathrm{card}_I(J) = \mathrm{card}_I(K)$ si et seulement si K est fini et son cardinal (usuel) coïncide avec celui de J.*

Démonstration. — Une des implication étant claire, supposons que K est fini et que son cardinal usuel coïncide avec celui de J. Dans ce cas les ensembles $R = J \cup K$ et $S = J \cap K$ sont également finis. Les sous-ensembles J et K ayant le même cardinal (usuel), il en est de même pour $J' = J \setminus S$ et $K' = K \setminus S$, qui sont disjoints. En particulier, il existe une application bijective $g : J' \to K'$. Dans ce cas, l'application $f : I \to I$ définie par

$$f(i) = \begin{cases} g(i) \quad \text{pour} \quad i \in J', \\ g^{-1}(i) \quad \text{pour} \quad i \in K', \\ i \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est une involution et $f(J) = K$. □

Pour tout entier naturel k, on pourra donc écrire $\mathrm{card}_I(J) = k$ sans ambiguïté. Un sous-ensemble J de I est *cofini* si $\bar{J}$ est fini. D'après le lemme 2, on peut utiliser la même terminologie pour un élément de C_I. En particulier, J est cofini si et seulement si son cardinal est cofini. On remarquera que $\mathrm{card}_I(J) = 0$ si et seulement si $J = \emptyset$ et que $\mathrm{card}_I(J) = \bar{0}$ si et seulement si $J = I$.

2. Une relation d'ordre

Soient a et b deux éléments de C_I, correspondant respectivement à deux sous-ensembles J et K de I. On pose $a \leq b$ si et seulement s'il existe des applications injectives $g : J \to K$ et $h : \bar{K} \to \bar{J}$.

Proposition 3. — *La relation $\leq$ est bien définie et induit une relation d'ordre total sur C_I. De plus, étant donnés $a, b \in C_I$, on a $a \leq b$ si et seulement si $\bar{b} \leq \bar{a}$.*

Démonstration. — Considérons deux éléments $M, N \in \mathcal{P}(I)$ tels que $\mathrm{card}_I(M) = \mathrm{card}_I(J) = a$ et $\mathrm{card}_I(N) = \mathrm{card}_I(K) = b$. Par hypothèse, il existe deux bijections $u, v : I \to I$ telles que $u(M) = J$ et $v(N) = K$. Supposons qu'il existe des applications injectives $f : J \to K$ et $g : \bar{K} \to \bar{J}$. Dans ce cas, les applications $u^{-1}fu : M \to N$ et $v^{-1}gv : \bar{N} \to \bar{M}$ sont injectives, ce qui montre que la relation $\leq$ est bien définie. La refléxivité et la transitivité sont immédiates. Supposons que $a \leq b$ et $b \leq a$. Par définition, il existe des applications injectives $J \to K$ et $K \to J$ et le théorème de Cantor-Bernstein affirme alors qu'il existe une bijection entre J et K. De même, les ensembles $\bar{J}$ et $\bar{K}$ sont équipotents, d'où $J \sim_I K$ et donc $a = b$. Il ne reste qu'à vérifier que la relation d'ordre est totale.Soient $a = \mathrm{card}_I(J)$ et $b = \mathrm{card}_I(K)$ deux cardinaux de I. Comme dans la démonstration du lemme 2, posons $R = J \cup K, S = J \cap K, J' = J \setminus S$ et $K' = K \setminus S$. Une classique application du lemme de Zorn affirme qu'il existe une application injective $f : J' \to K'$ ou $g : K' \to J'$. Par symétrie, on peut supposer que la première condition est remplie, auquel cas l'application $u : J \to K$ définie par

$$u(j) = \begin{cases} f(j) \quad \text{si} \quad j \in J', \\ \\ j \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

est injective. Par construction, on a les identités $\bar{K} = \bar{R} \cup J'$ et $\bar{J} = \bar{R} \cup K'$, les unions étant disjointes. Dans ce cas, l'application $v : \bar{K} \to \bar{J}$ définie exactement comme u est injective, d'où $a \leq b$. La dernière affirmation de l'énoncé est immédiate et découle de la définition de l'involution canonique. $\square$

Remarque 4. — La relation d'ordre sur C_I prolonge la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{N}$ (en identifiant $\mathbb{N}$ à l'ensemble des cardinaux finis). Pour tout cardinal $k \in C_I$ et tout entier $n \leq k$ le cardinal $k - n$ est bien défini et on a l'inégalité $k - n \leq k$, qui est stricte si et seulement si n est non nul et k est fini ou cofini. De même, pour $n \leq \bar{k}$, on peut considérer le cardinal $k + n$ et on a l'inégalité $k \leq k + n$.

On rappelle qu'étant donnés deux ensembles totalement ordonnés X et Y, on peut considérer leur somme $X + Y$, qui est l'union disjointe de X et Y, munie de la relation d'ordre

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x, y \in X \quad \text{et} \quad x \leq y, \\ x, y \in Y \quad \text{et} \quad x \leq y, \\ x \in X \quad \text{et} \quad y \in Y. \end{cases}$$

De plus, on note $\bar{X}$ l'ensemble X muni de la relation d'ordre inversée.

Exemple 5. — Si I est dénombrable (i.e. équipotent à $\mathbb{N}$), l'ensemble C_I s'identifie avec l'ensemble ordonné $\mathbb{N} + \{\infty\} + \bar{\mathbb{N}}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les ordres finis, ceux de $\bar{\mathbb{N}}$ les ordres cofinis et l'élément ∞ est le cardinal des sous-ensembles infinis de I pour lesquels le complémentaire est également infini (ils sont tous équivalents par la relation $\sim_I$). On remarquera que l'ensemble $(C_I, \leq)$ n'est pas bien ordonné, car, par exemple, le sous-ensemble $\bar{\mathbb{N}}$ ne possède pas de plus petit élément.

3. Comparaison des cardinaux

Nous allons à présent comparer les cardinaux C_I et C_L pour deux ensembles I et L.

Lemme 6. — *Soient I et J deux ensembles et $\iota : I \to L$ une application injective. Étant donnés $J, K \in \mathcal{P}(I)$, si $J \sim_I K$ alors $\iota(J) \sim_L \iota(K)$. La réciproque est vraie lorsque l'image de ι est finie ou cofinie.*

Démonstration. — En identifiant I avec $\iota(I)$, on peut supposer que I est un sous-ensemble de L. Soient J et K deux éléments de $\mathcal{P}(I)$ et supposons qu'il existe une application bijective $f : I \to I$ telle que $f(J) = K$. Dans ce cas, l'application $g : L \to L$ définie par

$$g(\ell) = \begin{cases} f(\ell) \quad \text{si} \quad \ell \in I, \\ \\ \ell \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est bijective et $g(J) = K$. Si I est fini, la seconde partie de l'énoncé découle directement du lemme 2. Dans le cas cofini, on commence par remarquer que $\operatorname{card}_L(J) = \operatorname{card}_L(K)$ si et seulement si $\operatorname{card}_L(\bar{J}^L) = \operatorname{card}_L(\bar{K}^L)$ (ici, pour éviter des confusions, on note $\bar{J}^L$ le complémentaire de J dans L) et que $\bar{J}^L$ est l'union disjointe de $\bar{J}^I$ et de $\bar{I}^L$, ce dernier étamt fini. En particulier, si J est cofini (en tant que sous-ensemble de I ou de J, ce qui revient au même), il en est de même pour K et on en déduit l'identité $\overline{\mathrm{card}_I(J)} = \overline{\mathrm{card}_I(K)}$, d'où $\mathrm{card}_I(J) = \mathrm{card}_I(K)$. Finalement, si $\bar{J}^L$ est infini, il est équipotent à $\bar{J}^I$ et les ensembles $\bar{J}^I$ et $\bar{K}^I$ sont donc équipotents et on obtient une fois encore la relation $\mathrm{card}_I(J) = \mathrm{card}_I(K)$. □

Le résultat ci-dessus affirme que toute application injective $\iota : I \to L$ induit une application $C_I \to C_L$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(I) & \xrightarrow{\mathrm{card}_I} & C_I \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{P}(L) & \xrightarrow{\mathrm{card}_L} & C_L \end{array}$$

soit commutatif.

Remarque 7. — L'application $C_I \to C_J$ n'est pas nécessairement injective. Prenons par exemple $I = \mathbb{N}$ et $L = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Les ensembles I et L étant dénombrables, les ensembles ordonnés C_I et C_J sont isomorphes, s'identifiant avec $\mathbb{N} + \{\infty\} + \bar{\mathbb{N}}$ (cf. l'exemple 5). Néanmoins, en considérant l'application $\iota : I \to L$ définie par $f(n) = (n, 0)$, l'application $C_I \to C_J$ correspondante n'est pas injective.

4. Une application

Nous terminons cette note en reprenant le résultat classique suivant : soient J et K deux sous-ensembles non vides d'un un ensemble fini I de cardinal n. Si on a l'inégalité stricte $\mathrm{card}_I(J) + \mathrm{card}_I(K) > n$, qui est équivalente à $\mathrm{card}_I(J) > \overline{\mathrm{card}_I(K)}$, alors $J \cap K$ est non vide. Avec cette formulation, le résultat est en fait valable en toute généralité.

Proposition 8. — *Soient J et K deux sous-ensembles non vides d'un ensemble I. Si on a l'inégalité stricte $\mathrm{card}_I(J) > \overline{\mathrm{card}_I(K)}$ alors $J \cap K$ est non vide.*

Démonstration. — Si l'on avait $J \cap K = \emptyset$, on obtiendrait les inclusions $J \subset \bar{K}$ et $K \subset \bar{J}$, d'où l'inégalité $\mathrm{card}_I(J) \leq \mathrm{card}_I(\bar{K}) = \overline{\mathrm{card}_I(K)}$, ce qui est exclu. □

---

26 mai 2019

LEONARDO ZAPPONI • *E-mail :* leonardo.zapponi@imj-prg.fr