Qatar Acta Arithmetica, vol. 60, 1978.

Formes différentielles logarithmiques sur le disque rigide fermé

1. Notations et conventions

Soit R un anneau de valuation discrère complet, de corps des fractions K, idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel k. En notant $R\{X\}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de $R[X]$, un élément f de l'anneau $\mathcal{R} = K\{X\} = R\{X\} \otimes_R K$ est une série formelle

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n,$$

avec $a_n \in K$ et $\lim_n a_n = 0$. On a alors l'identité $\mathcal{R}^\times = K^\times \cdot \mathcal{U}$, avec

$$\mathcal{U} = 1 + \mathfrak{m}\{X\} \subset R\{X\}^\times.$$

Le théorème de préparation de Weierstrass (ou l'une de ses généralisations) affirme qu'un élément non nul $f \in \mathcal{R}$ s'écrit de manière unique comme produit $f = ugh$ avec

- $u \in K^\times$,
- $g \in R[X]$ unitaire,
- $h \in \mathcal{U}$.

On obtient une expression analogue pour un élément de $\mathcal{K}$, en remplaçant le polynôme g par une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes unitaires à coefficients dans R. En posant $\mathcal{X} = \mathtt{Spm}(\mathcal{R})$, l'ensemble $\mathcal{X}(\bar{K})$ s'identifie alors canoniquement avec le disque unitaire fermé.

2. Le groupe $\mathcal{U}$

Le lemme suivant est crucial pour la suite.

Lemme 1 - Un élément $f \in \mathcal{U}$ s'écrit de manière unique comme produit

$$f = \prod_{n \geq 1} (1 - u_n X^n),$$

avec $u_i \in \mathfrak{m}$ et $\lim_n u_n = 0$.

Première démonstration : Tout d'abord, on vérifie facilement que le produit ci-dessus est convergent et qu'une telle expression est unique. La réelle difficulté est de montrer son existence. Pour ce faire, en posant

$$f = 1 + \sum_{n > 0} a_n X^n,$$

la suite (u_n) est définie par les relations

$$\begin{cases} u_1 = -a_1, \\ f - \prod_{i=1}^{n-1} (1 - u_i X^i) = -u_n X^n + \cdots . \end{cases}$$

Il faut juste montrer que $u_n \in \mathfrak{m}$ et que $\lim_n u_n = 0$. Soit $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation $\mathfrak{m}$-adique, étendue à K en posant $v(0) = +\infty$. Considérons la suite d'entiers (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_1 = \min\{v(a_1), 1\}, \\ v_n = \min\{v(a_n), v_{m_1} + \cdots + v_{m_i}\}_{i>1, 0<m_1<\cdots<m_i, m_1+\cdots+m_i=n}. \end{cases}$$

Par construction, on a l'inégalité $v(u_n) \geq v_n$. On vérifie facilement l'inégalité $v_n \geq 1$, qui se traduit par la relation $u_n \in \mathfrak{m}$. Montrons que v_n diverge. Si tel n'était pas le cas, il existerait un entier d et une infinité d'entiers n tels que $v_n = d$. Soit n_0 le plus petit entier tel que $v(u_n) > d$ et $v(v_n) \geq d$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier, si $v_n = d$, avec $n \geq n_0$ on en déduit que $v_n = v_{m_1} + \cdots + v_{m_i}$, avec $i > 1, m_1 < \cdots < m_i$ et $m_1 + \cdots + m_i = n$. Tout d'abord, on a les relations

$$n = m_1 + \cdots + m_i > 1 + 2 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2} > \frac{i^2}{2},$$

qui amènent à l'inégalité $i < \sqrt{2n}$. D'autre part, l'égalité $n = m_1 + \cdots + m_i$ entraîne les relations

$$m_i \geq \frac{n}{i} \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

En choisissant n supérieur à $2n_0^2$, on en déduit finalement les relations

$$d = v_n \geq v_{m_i} + 1 \geq d + 1 > d,$$

ce qui est absurde et conclut la démonstration.

<u>Seconde démonstration</u> : Pour tout entier $n > 0$, posons $R_n = R/\mathfrak{m}^n$, de telle sorte que $R\{X\} = \varprojlim R_n[X]$. Pour tout groupe abélien G, noté additivement, soit $S(G)$ l'ensemble des suites $\zeta = (u_i) = (u_1, u_2, \ldots)$ de G et indiquons par $S'(G)$ le sous-ensemble de $S(G)$ formé par les suites à support fini, i.e. pour lesquelles $u_i \neq 0$ pour un nombre fini d'entiers i. Ces deux ensembles possèdent une structure naturelle de groupe abélien. On remarquera que le groupe $\varprojlim S'(R_n)$ s'identifie avec l'ensemble des suites de $S(R)$ qui convergent vers 0. On vérifie facilement que l'application

$$\begin{aligned} S'(R_n) &\xrightarrow{\sigma} XR_n[X] \\ (u_i) &\mapsto \sum_i u_i X^i \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes et que la seconde application

$$\begin{aligned} S'(R_n) &\xrightarrow{\tau} R_n[X] \\ (u_i) &\mapsto \prod_i (1 - u_i X^i) \end{aligned}$$

est injective. Étant données deux suites $\zeta \in S'(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n)$ et $\xi \in S'(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n)$, considérées toutes deux comme éléments de $S'(R_n)$, on vérifie facilement la relation

(1) $$\tau(\zeta + \xi) = \tau(\zeta) + \sigma(\xi).$$

Notons finalement $f_n \in R_n[X]$ l'image canonique de $f \in \mathcal{U}$. Supposons que, pour un entier $n \geq 1$, il existe une suite $\zeta_n \in S'(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n)$ telle que $\tau(\zeta_n) = f_n$ (tel est le cas pour $n = 1$, en considérant la suite nulle). L'injectivité de τ implique que ζ_n est alors unique. Fixons un relèvement $\xi \in S'(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{n+1})$ de ζ. On a alors la relation

$$\tau(\xi) = f_{n+1} + g \in R_{n+1}[X],$$

avec $g \in X\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}[X]$. En posant

$$\zeta_{n+1} = \xi - \sigma^{-1}(g),$$

la relation 1 amène alors à l'identité $\tau(\zeta_{n+1}) = f_{n+1}$. En itérant cette construction, on obtient un système projectif (ζ_n), qui définit, en passant à la limite projective, une suite $\zeta = (u_i) \in S(\mathfrak{m})$ qui converge vers 0. Par construction, on a alors l'identité

$$f = \prod_{i \geq 1} (1 - u_i X^i).$$

□

3. Formes différentielles logarithmiques

Le but de cette note est de déterminer des conditions nécessaires, et si possible suffisantes, pour qu'une forme différentielle $\omega = f dX \in \Omega^1_{\mathcal{K}/K}$ soit logarithmique, i.e. s'écrive comme $\omega = dg/g$ avec $g \in \mathcal{K}$. Une première condition est assez immédiate : tous les pôles de ω sont simples et ses résidus sont des entiers. Quitte à étendre K, on supposera que tous les pôles $x_1, \ldots, x_n$ de ω appartiennent à R. Dans ce cas, en notant $a_1, \ldots, a_n$ leurs résidus respectifs, en posant

$$g = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^{a_i} \in K(X),$$

la forme différentielle ω est logarithmique si et seulement s'il en est de même pour $\omega - dg/g$, qui est régulière (sans pôle). On se réduit donc au cas $\omega = f dX$ avec $f \in \mathcal{R}$. Si ω est logarithmique, elle s'écrit alors comme $\omega = dg/g$, avec $g \in \mathcal{U}$ univoquement déterminé. On en déduit, en particulier, que f appartient à $\mathfrak{m}\{X\}$. Nous pouvons finalement énoncer et démontrer le résultat central de cette note. Pour simplifier, nous supposerons que R est de caractéristique 0.

Proposition 2 - Soit $\omega = f dX \in \Omega^1_{\mathcal{K}/K}$ avec $f = \sum_n a_n X^n \in \mathcal{R}$. Considérons la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = -a_0, \\ u_n = -\frac{1}{n} \left(a_{n-1} + \sum_{d|n, d<n} d u_d^{\frac{n}{d}} \right). \end{cases}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La forme différentielle ω est logarithmique.
2. Pour tout entier n, on a la relation $u_n \in \mathfrak{m}$ et $\lim_n u_n = 0$.

Si l'une de ces conditions est remplie, on a l'identité $\omega = dg/g$, avec

$$g = \prod_{n>0} (1 - u_n X^n) \in \mathcal{U}.$$

Démonstration: La forme différentielle ω est logarithmique si et seulement si elle s'ecrit comme $\omega = dg/g$, avec $g \in \mathcal{U}$. D'après le lemme 1, on a l'expression

$$g = \prod_{n>0} (1 - u_n X^n),$$

ce qui amène aux identités

$$dg/g = -\sum_{n>0} \frac{n u_n X^{n-1}}{1 - u_n X^n} = -\sum_{n,m>0} n u_n^m X^{nm-1} = \sum_n a_n X^n.$$

On obtient donc la relation

$$a_n = -\sum_{d|n+1} du_d^{\frac{n}{d}},$$

et, par conséquent,

$$u_n = -\frac{1}{n}\left(a_{n-1} + \sum_{d|n, d<n} du_d^{\frac{n}{d}}\right).$$

Il s'en suit que g appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si $u_n \in \mathfrak{m}$ et $\lim_n u_n = 0$. □

4. Un cas particulier

Dans la suite, on suppose que K est un corps p-adique. En suivant la notation du paragraphe précédent, si v désigne la valuation $\mathfrak{m}$-adique de K, l'entier $e = v(p)$ est appelé indice de ramification absolu de K (par rapport à $\mathbb{Q}_p$). Nous allons détailler les résultats du paragraphe précédent dans le cas $e < p-1$.

Lemme 3 - Pour $e < p-1$, l'application $\exp : X\mathfrak{m}\{X\} \longrightarrow \mathcal{U}$, qui associe à un élément f la série

$$\exp(f) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n}{n!}.$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration: Tout élément $f \in X\mathfrak{m}\{x\}$ s'écrit comme $f = \pi g$, où π est une uniformisante de $\mathfrak{m}$ et $g \in XR\{X\}$. Il suffit de vérifier que la suite $\frac{\pi^n}{n!}$ converge vers 0. On a les relation

$$v(n!) = e \sum_{1\leq i\leq \log_p(n)} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq e \sum_{1\leq i\leq \log_p(n)} \frac{n}{p^i} \leq e\frac{n-1}{p-1} \leq n\left(1 - \frac{1}{p-1}\right),$$

ce qui amène à l'inégalité

$$v\left(\frac{\pi^n}{n!}\right) \geq \frac{n}{p-1}$$

et permet de conclure. On vérifie ensuite sans difficulté l'identité $\exp(f+g) = \exp(f)\exp(g)$. Finalement, concernant la surjectivité, on montre aisément que la réciproque de l'application $\exp$ est donnée par l'application $\log : \mathcal{U} \to X\mathfrak{m}\{X\}$ qui associe à g la série

$$\sum_{n>0} \frac{(1-g)^n}{n}.$$

□

La primitive d'une forme différentielle $\omega = fdX$, avec $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathcal{R}$, est la série formelle

$$\int \omega = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} \in XR[\![X]\!].$$

Remarque - En général, $\int \omega$ n'appartient pas à $\mathcal{R}$. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer la série forme différentielle $\omega = fdX$, avec

$$f = \sum_{n\geq 0} p^n X^{p^n - 1}.$$

Proposition 4 - Si K est un corps p-adique d'indice de ramification global strictement inférieur à $p-1$ alors une forme différentielle régulière $\omega \in \Omega^1_{K/k}$ est logarithmique si et seulement si $\int \omega$ appartient à $X\mathfrak{m}\{X\}$, auquel cas on a $\omega = dg/g$ avec $g = \exp(\int \omega)$.

Démonstration: Commençons par supposer que $\omega = fdx$ est logarithmique, auquel cas f appartient à $\mathfrak{m}\{X\}$. D'après la proposition 2, en posant $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, on a la relation

$$a_{n-1} = -\sum_{d|n} du_d^{\frac{n}{d}}.$$

Nous devons alors montrer que pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité stricte $v(a_{n-1}) > v(n)$. L'assertion étant triviale si p ne divise pas n, posons $n = p^s m$ avec $s > 0$ et m premier à p. Un diviseur d de n s'écrit alors comme $d = p^t u$ avec $0 \leq t \leq s$ et $uv = m$, ce qui amène aux relations

$$v\left(du_d^{\frac{n}{d}}\right) \geq et + p^{s-t}v.$$

Pour $t = s$, on obtient

$$v\left(du_d^{\frac{n}{d}}\right) \geq es + v = v(n) + v > v(n).$$

Si t est strictement inférieur à s, on a les inégalités

$$v\left(du_d^{\frac{n}{d}}\right) \geq et + p(s-t)v \geq et + p(s-t) > et + e(s-t) = v(n).$$

On en déduit donc que $v(a_{n-1})$ est strictement supérieur à $v(n)$, ce qui implique que $\int \omega$ appartient à $X\mathfrak{m}\{X\}$. La réciproque est immédiate, en remarquant que l'on a l'identité $d\exp(\int \omega) = \exp(\int \omega)\omega$. □

Remarque - L'hypothèse $e < p-1$ est nécessaire. En effet en prenant $K = \mathbb{Q}_p(\pi)$, avec $\pi = p^{\frac{1}{p-1}}$, la forme différentielle $\omega = \pi dX$ remplit les conditions de la proposition 4, mais n'est pas logarithmique. Pour le montrer, considérons la suite (u_n) de la proposition 2 et vérifions que $v(u_{p^n}) = 1$ pour tout entier $n \geq 0$. On procède par récurrence : la propriété est vraie pour $n = 0$, car $v(u_1) = v(-\pi) = 1$. Soit $n > 1$ et supposons que $v(u_{p^i}) = 1$ pour tout $i < n$. Pour $i < n-1$, on a les relations

$$v\left(p^{i-n}u_{p^i}^{p^{n-i}}\right) = p^{n-i} - (n-i)(p-1) \geq p(n-i) - (n-i)(p-1) = n-i \geq 2.$$

D'autre part, on a l'identité

$$v\left(p^{-1}u_{p^{n-1}}^p\right) = 1.$$

En utilisant l'identité

$$u_{p^n} = -\sum_{i=0}^{n-1} p^{i-n}u_{p^i}^{p^{n-i}}.$$

on en déduit finalement la relation $v(u_{p^n}) = 1$. La suite (u_n) ne converge donc pas vers 0. La proposition 2 affirme alors que la forme différentielle ω n'est pas logarithmique.