Sur la théorie des catastrophes et ses applications aux désastres

Marc Chaperon

Où il sera question de catastrophes, de mode et de René Thom.

1. Aperçu et historique

1.1 L'article de 1966

L'usage par Thom du mot « catastrophe » et l'idée de la théorie sont apparus pour la première fois en 1966, dans un article[1] dont voici quelques extraits:

Ici nous emploierons le terme « Morphogenèse », conformément à l'étymologie, au sens le plus général, pour désigner tout processus créateur (ou destructeur) de formes ; on ne se préoccupera ni de la nature (matérielle ou non) du substrat des formes considérées, ni de la nature des forces qui causent ces changements.

C'est donc une théorie de l'émergence, de la modification ou de la disparition plus ou moins brusque de « formes » au sein de systèmes régis par des équations dépendant continûment des paramètres. Le mot « forme » est à prendre au sens de phénomène observable, ce qui ne nous éloigne pas de notre problématique météorologique.

La théorie que je propose ici provient de la conjonction de deux sources: d'une part, mes propres recherches, en Topologieet Analyse Différentielles sur le problème dit de la stabilité structurelle : étant donnée une « forme » géométriquement définie par le graphe d'une fonction F(x) par exemple, on se propose de savoir si cette fonction est « structurellement stable », c'est-à-dire si, en perturbant la fonction F suffisamment peu, la fonction perturbée G = F + δF$ a encore la même forme (topologique) que la fonction F initiale[2]. D'autre part, la lecture des traités d'Embryologie, et notamment des livres de C. H. Waddington, dont les idées […] m'ont paru s'adapter très précisément au schéma abstrait que j'avais rencontré dans ma théorie de la stabilité structurelle des fonctions et applications différentiables.

Nous sommes apparemment plus loin ici de la météorologie—et de mes compétences—mais il faut comprendre que la biologie théorique dans laquelle s'inscrit cette démarche traite de phénomènes macroscopiques et globaux, quelles que puissent être leurs causes microscopiques. La thermodynamique et l'électricité se sont ainsi développées avant que l'on ait la moindre idée des phénomènes microscopiques en jeu ; dans son discours de réception du prix Nobel, Richard Feynman estime d'ailleurs que les trois niveaux de la physique, le très petit, l'humain et le très grand, ont peu de chances de se réduire un jour à un seul.

C'est dire que la théorie présente un grand caractère d'abstraction et de généralité, et son champ d'application dépasse largement l'Embryologie, ou même la Biologie. De fait, j'en connais des applications en Optique Géométrique, en Hydrodynamique et Dynamique des Gaz (Singularités stables des fronts d'onde et des ondes de choc) ;

Ces applications à des problèmes physiques sont maintenant classiques. Une partie de la théorie de Thom est d'ailleurs née de *l'observation* de caustiques tridimensionnelles en optique géométrique. C'est de l'abstraction au vrai sens du terme: pour expliquer une telle observation, on cherche une relation de cause à effet aussi pure que possible (l'objet même des mathématiques) ; quand on l'a trouvée, elle a de bonnes chances de se rencontrer dans des situations concrètes radicalement autres, souvent plus importantes que celle dont on est parti.

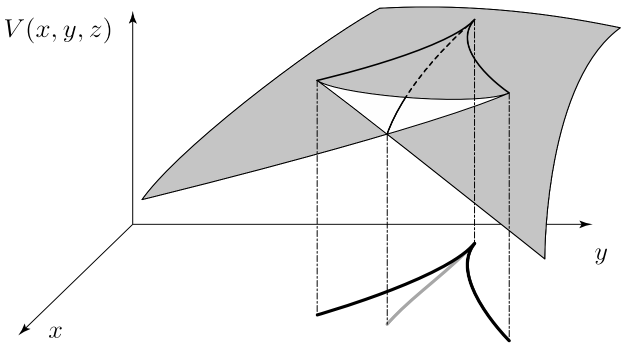
d'une manière sans doute plus spéculative, mais néanmoins utile, la notion de « champ morphogénétique » s'identifie sur le plan physiologique à la notion de champ fonctionnel des physiologistes ; dans le cas particulier des activités nerveuses chez l'Homme, un mot peut être considéré comme un tel champ dans l'espace des activités neuroniques, et l'étude des associations « stables » de mots débouche sur une théorie géométrique du langage, de la « signification ».

---

[1] René Thom. *Une théorie dynamique de la Morphogenèse*, 1966. C.H. Waddington (Ed.), Towards a theoretical biology I, p. 52-166. Univ. of Edinburgh Press.

[2] Thom décrit son œuvre remarquable sur les singularités d'applications différentiables, qui trouve ses sources chez Poincaré, Morse et Whitney et a été menée à son terme par Mather.

Tentative intéressante de fonder l'étude du langage humain sur le sens, à rebours de la mode d'alors. L'influence de ces idées en sémiotique n'a pas faibli.



Un front d'onde typique (caustique, par exemple), la *queue d'aronde*

La queue d'aronde apparaît comme caustique car le croisement des rayons lumineux pas trop concentrés ne pose pas de difficulté (il y a très peu de photons dans chacun d'eux). Il n'en va pas de même pour des milieux matériels : quand on manipule une feuille d'aluminium, par exemple, elle a « envie » de former des queues d'aronde—théorie des surfaces développables—mais il lui est évidemment interdit de se traverser elle-même ; c'est pourquoi elle se froisse, suivant des modalités dont l'analyse requiert plus que la théorie des surfaces développables. C'est un problème général en mécanique des milieux continus (par exemple l'atmosphère): les équations qui les modélisent reposent sur des hypothèses de régularité, qui sont niées quand les solutions des équations présentent des chocs. Ce problème n'est pas facile à résoudre : ainsi, la « vraie » feuille d'aluminium froissé n'a rien à voir avec ce qu'on obtiendrait en coupant la queue d'aronde le long de l'arête d'auto-intersections.

[Dans tous ces cas où] d'infimes variations des conditions initiales peuvent conduire à de très grandes variations de l'évolution ultérieure[3] *[…], il est possible de postuler que le phénomène est déterminé; mais c'est là une position proprement métaphysique, inaccessible à toute vérification expérimentale. Si l'on veut se contenter de propriétés expérimentalement contrôlables, on sera amené à remplacer l'hypothèse invérifiable du déterminisme par la propriété empiriquement vérifiable de « stabilité structurelle »: un processus (P) est structurellement stable, si une petite variation des conditions initiales conduit à un processus (P') isomorphe à (P) (en ce sens qu'une petite transformation sur l'espace-temps—un ε-homéomorphisme, en géométrie—ramène le processus (P') en le processus (P)).*

En langage ordinaire, les situations obtenues par petite perturbation à partir de la situation donnée « lui ressemblent »—mathématiquement, la question cruciale est de savoir en quel sens. Il est essentiel de noter que les paramètres sont inclus dans cette définition, c'est-à-dire que l'on classifie des accidents (catastrophes) inévitables et non des situations stables.

1.2 *Stabilité structurelle et morphogénèse*[4]

La publication du *magnum opus* de Thom, achevé en 1968, a pris quatre ans. Il avait déjà beaucoup circulé chez les scientifiques, en particulier en Grande-Bretagne, où des esprits éminents ne croient pas déchoir en parlant de science dans les grands quotidiens :

Une critique éclairée[5]

It is impossible to give a brief description of the impact of this book. In one sense the only book with which it can be compared is Newton's Principia. Both lay out a new conceptual framework for the understanding of nature, and equally both go on to unbounded speculation. From Newton's book, as Truesdell says, 'our forebears learned how to use the concept of force given a priori'; and there can be no doubt that from Thom's will come an elaboration which will allow our children to

---

[3] Typique des catastrophes ; l'*effet papillon* n'était donc pas inconnu de Thom en 1966.

[4] W. A. Benjamin Inc., Reading, MA., 1972. Traduction anglaise par David Fowler, avec un appendice de John Mather: *Structural stability and Morphogenesis*, W. A. Benjamin Inc., Reading, MA., 1975. Paperback edition by Westview Press (Advanced Books Classics), 1994.

[5] Bien que, d'une certaine façon, le livre de Thom soit aux antipodes des *Principia*, qui tournent autour de la loi de la gravitation universelle (en commettant beaucoup moins d'erreurs que ne le prétend Kilmister) alors que *Stabilité structurelle et morphogénèse* a pour sous-titre « Esquisse d'une théorie générale des modèles ».

use more precisely the concept of catastrophe that he introduces. Almost all of the speculation in the Principia has turned out to be hopelessly wrong, though it would be hard to say to what extent this prevented its being useful at the time. So the criterion for Thom's speculative applications must come from their stimulating character, without trying to prejudge their correctness. An English translation is promised… but the reader is advised not to wait so long to acquaint himself with a major intellectual advance of the century.

C.W. Kilmister, The Times Higher Education Supplement

Et sa traduction « grand public »


L'EXPRES

SCIENCE

Le nouveau Newton est français

Le coup de foudre et le déferlement des vagues expliqués par les maths : c'est la théorie très sérieuse d'un savant français.

Qui est donc ce Pr Thom, dont les travaux soulèvent tant d'intérêt ? Cinquante et un ans, médaille Fields en 1958, l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques, il est aujourd'hui professeur permanent à l'Institut des hautes études scientifiques. Installé dans un parc de 10 hectares à Bures-sur-Yvette, cet Institut, qui est une fondation privée, s'efforce de devenir un Princeton français. Depuis 1969, il a accueilli, chaque année, une centaine de mathématiciens et de physiciens théoriques, venus de trente-quatre pays.

« J'ai hésité sur le choix du mot, explique le Pr Thom. J'avais d'abord pensé à discontinuité. Mais ce n'était pas assez dynamique. A mutation. Trop biologique. A changement. Trop mou.

(*L'Express* du 14 au 20 octobre 1974[6])

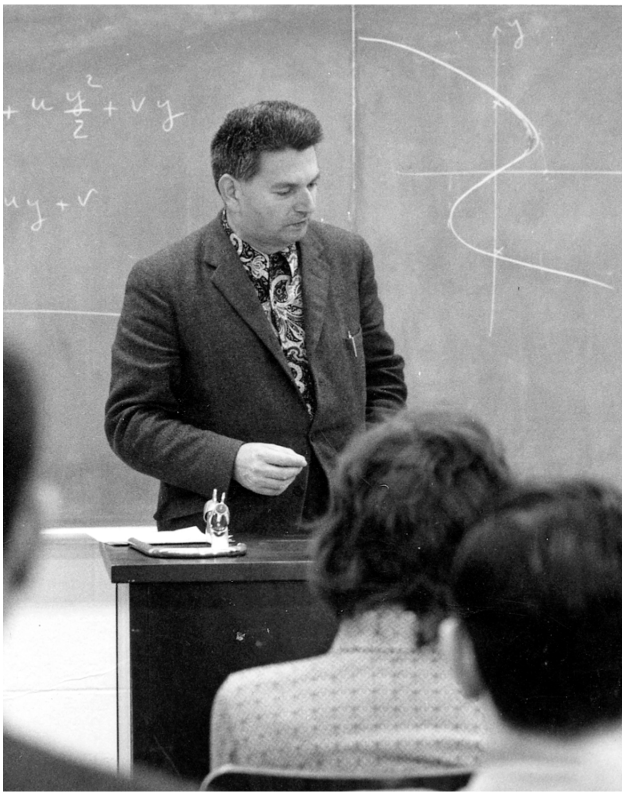
De tels articles furent le point de départ d'une mode souvent délirante, favorisée par le caractère très mystérieux de l'ouvrage—même pour ceux qui, comme moi, avaient été formés pour saisir une partie de son contenu mathématique. Un recueil de cours et d'articles de Thom, *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, paru peu après dans une collection de poche, fut aussi un étonnant succès de librairie.

1.3 "How to avoid personal disaster"

Ce sous-titre d'un livre sur les catastrophes commis à l'époque montre dans quels abysses le tumulte médiatique qui suivit la parution de *Stabilité structurelle et morphogénèse* avait fait sombrer le débat. Il part néanmoins d'une question de bon sens: la théorie des catastrophes permet-elle d'éviter celles-ci ? La question était d'importance pour les enfants de la guerre froide, vivant dans la terreur du conflit nucléaire. Indépendamment des fluctuations de la mode, une théorie permettant peut-être d'éviter LA catastrophe ne pouvait donc manquer de susciter beaucoup d'espoir.

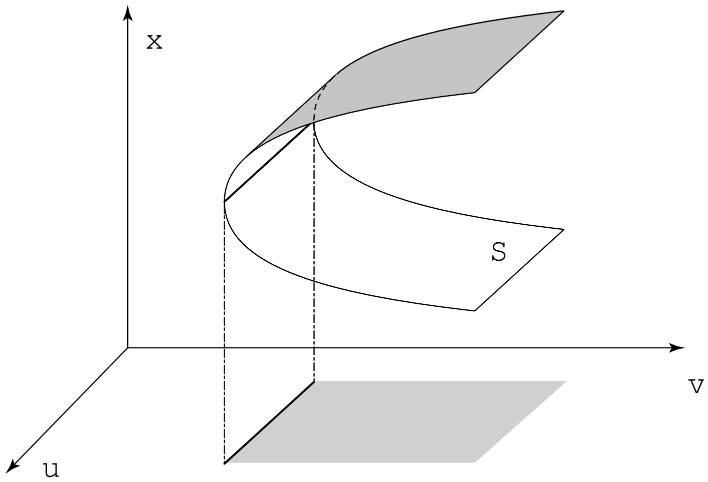
La question est de savoir si cet espoir était fondé, c'est-à-dire si les idées de Thom ont un rôle à jouer dans la prévention des catastrophes (au sens ordinaire), naturelles ou non. Voici quelques exemples très simples pour commencer :

6 À la fin du texte sélectionné, Thom dit comment il en est venu à choisir le mot *catastrophe*.



Thom donnant une conférence vers 1973

En marchant sur la partie supérieure de la courbe présentée sur le tableau à droite de René Thom par une nuit noire, sans canne ni lampe, vous risquez d'arriver au bord de la falaise et de tomber : c'est la plus simple des catastrophes, le *pli*. Si l'on oublie le bas de la courbe, ce qui arrive ensuite n'est pas contenu dans la théorie (locale et qualitative) de cette catastrophe— dont le nom vient de ce que la projection de la surface S ci-dessous sur le plan des paramètres (u,v) revient à la « plier »:



Cet exemple illustre déjà un apport de la théorie de Thom: si, comme beaucoup de « modélisateurs », vous avez le nez sur la surface S en avançant vers le bord de la falaise, vous êtes incapable de prévoir la catastrophe (cf. l'évaluation positive, par les agences de notation, de sociétés en faillite le lendemain).

Les deux figures suivantes sont tirées du livre de Thom.

Bifurcation (du côté des victimes)

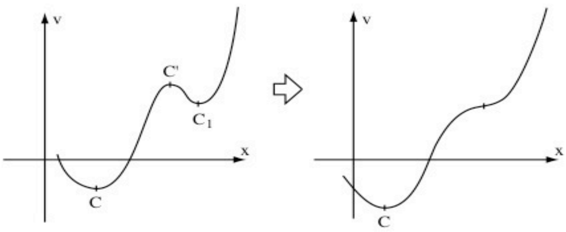
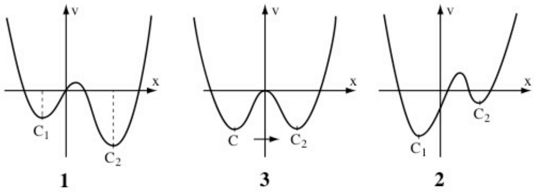


Figure 5-1 Figure 5-2

Une autre occurrence de la catastrophe du pli : supposons que vous ayez une connaissance limitée de la situation économique globale sur la planète Terre, et que vous souhaitiez minimiser vos pertes[7].
Votre manque d'information vous cantonne dans les minima locaux et vous allez rester niché dans le « trou » C_1 tant qu'il existe. Si le monde change et que ce minimum local disparaît, vous allez devoir chercher ailleurs et votre univers va perdre de sa stabilité. Il n'est pas clair que vous y gagnerez (ici, il n'y a pas de force de gravitation vous conduisant automatiquement au meilleur état C). Thom, qui aimait beaucoup les trains, avait coutume de dire que « la bifurcation engendre la catastrophe ».

Conflit (du côté des bourreaux)



Vous voici devenu un investisseur avisé, à qui une fonction d'évaluation montre comment « minimiser ses pertes ». Vous avez donc maintenant beaucoup d'information et, dans le jargon de Thom, vous appliquez la convention de Maxwell : toujours choisir le minimum le plus bas[8].
Dans la situation 1, vous aurez choisi C_2. Le marché évolue alors et vous vous trouvez dans la situation 2, qui vous fait sauter en C_1 (dans la situation 3, les deux minima sont en conflit).

Bref, vous allez transférer brutalement[9] vos capitaux d'un secteur d'activité à un autre. Si des centaines de financiers font exactement la même chose au même moment, le résultat ne pourra-t-il pas être une véritable catastrophe ?

---

[7] Thom avait l'habitude pessimiste de chercher des minima plutôt que des maxima.

[8] Convention de minwell selon Christopher Zeeman.

[9] En supposant que les réglementations permettent pareille brutalité.

1.4 La catastrophe de la théorie des catastrophes

Dans les années 1970, le financement de la recherche scientifique sur projet n'était pas encore très courant en Europe, où l'on pouvait donc dire d'énormes bêtises sur les catastrophes sans que cela coûte un sou au contribuable. Il en allait autrement aux États-Unis d'Amérique: l'engouement extraordinaire pour la théorie de Thom y suscita le financement massif de recherches dont toutes n'étaient pas extrêmement sérieuses, d'où une crainte légitime que la communauté mathématique américaine ne s'en trouve discréditée.

Il fallait, pour y mettre le holà, l'intervention d'un gendarme ; paradoxalement, ce fut Stephen Smale, connu par ailleurs pour ses opinions libertaires : « Les bons modèles mathématiques ne sont pas ceux que des mathématiciens jetteraient en pâture aux sociologues, aux biologistes, etc., à charge pour ceux-ci de les développer. [Ils] ne commencent pas par les mathématiques, mais par une étude en profondeur des phénomènes. » [10].

Cette critique mit fin aux errements visés[11] mais aussi, malheureusement, à une période d'effervescence intellectuelle où mathématiciens purs et appliqués collaboraient avec divers utilisateurs, ouvrant les barrières qui entravent d'ordinaire la circulation des idées—c'est ainsi que beaucoup de scientifiques (météorologues par exemple?) ont connu des catastrophes « de base » comme la bifurcation de Hopf.
Sur le fond, la citation que j'ai extraite est donc plus que discutable : les *bons modèles mathématiques* commencent où ils peuvent, et il n'est certainement pas inutile de disposer d'un « stock » abondant de phénomènes mathématiques pour décrire le réel : je ne crois pas que les progrès fulgurants de la physique au dix-neuvième siècle puissent s'expliquer autrement.
Cette citation met au fond l'accent sur le problème de communication rencontré par la théorie des catastrophes : la pensée riche et subtile à l'œuvre dans les mathématiques de Thom était (et demeure) très en avance sur la pratique scientifique courante, de sorte que les modèles ainsi *jetés en pâture* ont souvent été incompris[12].

2. Une méthodologie

« Au moment où tant de savants calculent de par le monde, n'est-il pas souhaitable que d'aucuns, qui le peuvent, rêvent? » (dernière phrase de *Stabilité structurelle et morphogénèse*)

En un sens, l'opposition entre généralité et calculabilité est en effet inéluctable : si l'on prend un nombre réel au hasard, il n'a aucune chance d'être une fraction ni même un nombre algébrique ; en d'autres termes, il n'y a pas de *formule* permettant de l'exprimer.

2.1 Transversalité

La démarche de Thom consiste à se demander ce qui peut arriver « en général », c'est-à-dire (dans la catégorie considérée) pour des systèmes pris au hasard. L'idée est qu'un phénomène dont on a montré qu'il se produit presque toujours a toutes les chances de se produire dans les cas rencontrés. Un des outils essentiels dans cet ordre d'idées est le lemme de transversalité de Thom, résultat absolument remarquable qui permet de donner un sens précis et rigoureux aux mots « en général » et constitue un grand pourvoyeur de stabilité structurelle.

Cette démarche reprend celle de Poincaré qui, constatant qu'il n'était pas possible de mener assez loin les calculs *astronomiques* de la mécanique céleste, a fondé la dynamique qualitative en étudiant les équations différentielles « générales », dont le comportement était beaucoup plus accessible (l'abstraction peut jouer en mathématiques le rôle de l'expérience en physique[13], ce qui échappe à beaucoup de scientifiques[14]). Il n'est pas facile du tout de voir si les phénomènes

---

[10] *Good mathematical models are not generated by mathematicians throwing models to sociologists, biologists, etc. for the latter to pick up and develop. […] Good mathematical models don't start with the mathematics, but with a deep study of certain natural phenomena,* S. Smale. Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 6, 1360-1368.

[11] Sans totalement arrêter le développement de la théorie, en particulier par Vladimir Igorevitch Arnold et ses élèves en Union Soviétique (voir par exemple V. I. Arnold. *Catastrophe Theory*, Springer Verlag) et par Floris Takens aux Pays-Bas.

[12] Faute de relais en nombre suffisant, après l'érosion de ceux que le système éducatif édifié après la Révolution française avait eu le génie de créer.

[13] « Les mathématiques sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher. » (V. I. Arnold).

[14] La thèse d'André Katz, dont les résultats ont trouvé une confirmation presque immédiate dans la découverte des quasi-cristaux, a été ignorée parce qu'il y considérait des potentiels d'interaction « généraux » au lieu des potentiels « réalistes » (c'est-à-dire donnés par une formule) à l'œuvre dans la littérature cristallographique.

mis en évidence sur les systèmes dynamiques généraux se rencontrent en mécanique céleste[15] mais c'est tout de même beaucoup plus facile en sachant que chercher. Les résultats de l'astronome Jacques Laskar sur la stabilité du système solaire, par exemple, seraient impensables si ce travail abstrait n'avait pas été effectué en amont.

Une telle démarche peut en principe s'appliquer à d'autres systèmes très complexes comme ceux de la météorologie. Là (et plus encore en biologie), cependant, les équations ne sont pas « fermes et définitives » comme celles de la mécanique céleste—l'existence mathématique de leurs solutions pose en outre souvent un problème. Dans ce contexte plus flou, les calculs souvent gigantesques que l'on effectue ne peuvent avoir de sens que si le modèle possède une certaine forme de stabilité structurelle, et la connaissance des catastrophes élémentaires ou non qui peuvent survenir est une aide précieuse à la modélisation.

2.2 Déploiement universel

Le lemme de transversalité de Thom permet de savoir quels accidents surviennent en général dans un système dépendant d'un nombre donné de paramètres. La théorie du déploiement universel poursuit un but dual : étant donné un accident de complexité donnée dans un système dépendant d'un nombre arbitraire de variables d'état et de paramètres, elle affirme—quand elle s'applique—qu'il existe un choix de variables et de paramètres significatifs (en nombre beaucoup plus petit) permettant de décrire localement l'accident *par des formules simples* (formes normales).

Ce résultat d'une grande portée pratique et philosophique justifie à lui seul le sous-titre du livre de Thom : *Esquisse d'une théorie générale des modèles*.

2.3 Perspectives

Le point de vue de Thom est très loin d'avoir encore porté tous ses fruits. Si la théorie des catastrophes mathématiquement achevée dans les années 1970 est en bonne partie entrée dans les mœurs, le coup de frein donné par Smale a dans une large mesure empêché de creuser plus profond : les modèles justiciables d'un dessin en dimension deux ou trois (la catastrophe de la fronce !) ont été ressassés à l'envi mais les phénomènes plus complexes, dont la description exige davantage de variables et de paramètres significatifs, restent largement *terra incognita*[16].

Pour y pénétrer, on ne peut éviter de revenir à l'œuvre d'un mathématicien de génie, à sa « vision du monde » si forte dans son audace tranquille. On pourra ainsi continuer à *jeter en pâture* aux utilisateurs la réponse à des « questions qui se posent » (Poincaré[17]), réponse qui ne peut manquer d'avoir des conséquences concrètes.

Quant aux catastrophes naturelles… la théorie de Thom ne permet évidemment pas de déterminer la hauteur des digues à même de contenir les très gros tsunamis, ni de savoir si un cyclone va être particulièrement violent. En revanche, son objet est de fournir des instruments pour comprendre la formation des catastrophes au sens ordinaire du terme (« morphogenèse »), et ces instruments ne demandent qu'à être utilisés et développés.

---

15 Pas plus qu'il n'est facile de montrer qu'un nombre donné n'est pas algébrique.

16 Surtout quand on sort de la théorie des applications différentiables pour entrer dans celle des systèmes dynamiques ou des équations aux dérivées partielles, où la notion de situations « qui se ressemblent », à la base de toute théorie de la stabilité structurelle, n'est pas toujours claire mathématiquement. Deux articles récents que j'ai dédiés à V. I. Arnold proposent une exploration partielle de ces terres en grande partie vierges.

17 Par opposition aux « questions que l'on se pose ».