Le mouchoir de Bourbaki

Marc Chaperon

La science progresse par la mort des vieux.

Max Planck[1]

Même si c'est vrai, c'est faux.

Henri Michaux

Les vérités mathématiques, imputrescibles, existent pour toujours – et même depuis toujours, est-on parfois tenté de croire, telles des statues attendant qu'on les dévoile. À cette vision marmoréenne l'Histoire oppose sinon un total démenti, du moins le grouillement de la vie.

Préambule : le mouchoir de Lebesgue et ce qui s'ensuivit

À la fin du dix-neuvième siècle Gaston Darboux (S 1861), dans son cours à l'École, énonça que *Toute surface développable est réglée*. L'élève Henri Lebesgue (S 1894) sortit alors de sa poche un mouchoir en boule, portant probablement son matricule de normalien, et dit : « Montrez-moi les génératrices ! » Le mouchoir est en effet à première vue une surface *développable*, c'est-à-dire qu'il peut devenir plan sous l'effet d'un repassage ; chiffonné, il ne semble guère *réglé*, ne contenant apparemment aucun segment de droite[2].

Sous le masque de la plaisanterie[3] se cachait un vrai problème ; Lebesgue s'y attela sur le champ et construisit[4] des surfaces développables qui n'incluaient aucun segment de droite. Ce n'était pas facile, l'énoncé de Darboux étant tout sauf une imposture quand la surface est assez « lisse » pour avoir une courbure en tout point – nulle pour les surfaces développables. Il fallait donc en construire de pas trop lisses, que Lebesgue obtint en faisant tourner la courbe représentative $y=f(x)$ d'une fonction positive f autour de l'axe des x.[5] Pour satisfaire à ses exigences, cette fonction devait « avoir une dérivée qui change constamment de signe ».

Ainsi est née l'intégrale de Lebesgue, de bien plus vaste portée. Sans entrer dans des détails techniques, cet outil essentiel est consubstantiel à la théorie de la mesure, qui permet de mesurer la longueur d'un ensemble de points sur la droite, la surface d'un ensemble de points du plan ou le volume d'un ensemble de points dans l'espace. Or, ici, les choses se compliquent car cette mesurabilité dépend des axiomes de la théorie des ensembles que l'on accepte : la version « naturelle » de l'axiome du choix permet de *choisir* des ensembles non mesurables, alors qu'une version un peu plus faible – sans trop d'inconvénients – autorise à tout mesurer, ce qui supprime des problèmes byzantins et fastidieux.

---

[1] Selon la traduction de René Thom (S 1943, médaille Fields 1958).
[2] Les fameuses *génératrices*, qui remplissent la surface quand elle est réglée.
[3] Peu après, on rirait beaucoup pendant les cours de Lebesgue au Collège de France.
[4] Un mouchoir, surtout douteux, n'est pas un objet mathématique.
[5] Le plan *Oxy* étant ici plongé dans l'espace « ordinaire » à trois dimensions.

Ces questions *a priori* abstruses de fondements des mathématiques s'étaient posées avant que Lebesgue entre en scène, notamment dans l'œuvre de Georg Cantor, principal créateur de la théorie des ensembles, qui s'était heurté à l'opposition virulente d'aînés comme Kronecker craignant que les paradoxes inhérents à ce point de vue ne lézardent l'édifice mathématique.

Le « problème du mouchoir » n'a été vraiment résolu qu'au milieu des années 1950 : un travail très original de John Nash (suivi de Nicolaas Kuiper), implique en effet l'existence de surfaces développables ne contenant aucun segment de droite mais assez régulières puisqu'elles ont en tout point un plan tangent qui varie continûment avec le point. Le théorème de Nash-Kuiper confirme en outre… que l'on peut marcher sans déchirer son pantalon à chaque pas. De même qu'une chaise, vue au microscope, est un ensemble plein de trous sur lequel personne n'irait s'asseoir, un pantalon n'est évidemment pas une surface au sens mathématique. La différence est que l'idée commune de la chaise correspond à son usage alors que l'idée du pantalon comme surface pose le problème soulevé par Lebesgue[6]. Gustave Choquet (S 1934), un peu son fils spirituel, a fait en 1958 un très bel exposé au séminaire Bourbaki sur les travaux de Nash et Kuiper[7].

Bourbaki

Cette glorieuse entreprise normalienne comporte sa part d'imposture, revendiquée ou non. Elle a été fondée en juillet 1935 par neuf jeunes mathématiciens, dont huit archicubes que seul leur âge trop tendre avait protégés de l'hécatombe de la grande guerre[8]. Conscients d'être des survivants, ils se sentaient tenus à une refondation des mathématiques. Le nom de Bourbaki, dû à André Weil (S 1922), renvoie à une autre guerre et témoigne d'un humour certain : l'expression *armée de Bourbaki* s'était quelque temps appliquée à « un groupe désorganisé ou hétérogène, ne faisant pas preuve de rigueur », en référence aux soldats mal équipés de l'armée de l'Est commandée par le général Bourbaki pendant la déroute de 1870. Pour donner corps au canular sur l'existence d'un Bourbaki mathématicien[9], il fallut envoyer à l'Académie des sciences sa notice biographique, donc lui donner un prénom (Nicolas). Nos imposteurs sont allés jusqu'à mystifier leur maître Élie Cartan (S 1888) en faisant de Bourbaki un citoyen de l'imaginaire Poldévie[10], afin de publier sous son nom des articles collectifs.

Les soldats de cette nouvelle armée de Bourbaki n'étaient pas mal équipés : pour n'en citer que trois, Weil était un prodige[11] et un très grand mathématicien, plus tard récipiendaire ainsi

---

[6] Un pantalon « à la Darboux » se déchirerait immédiatement. Surtout depuis le développement vertigineux des ordinateurs, on approche plutôt des objets continus par des ensembles finis, mais ces objets continus ne peuvent représenter la réalité « trouée » que par un processus d'idéalisation plus ou moins inscrit dans nos gènes. Mikhael Gromov a cependant construit *en mathématiques* un fécond processus d'idéalisation de certains groupes finis, les regardant de loin comme nous regardons nos chaises et nos pantalons.
[7] D'autres aspects importants des surfaces développables sont traités dans la partie « Connaître, théoriser les formes » de *Formes*, numéro 23 de *L'archicube*, décembre 2017.
[8] Dans son ouvrage *Fatou, Julia, Montel*, Michèle Audin (S 1974) souligne que plus de quarante pour cent des élèves de l'École, officiers d'infanterie, ont été massacrés en 1914-18.
[9] Perpétué récemment par l'inclusion du nom de Bourbaki (S 1934) parmi ceux des archicubes célèbres salle des actes à l'École.
[10] Un consul de Poldévie barbu apparaît dans *Le Lotus Bleu*, aventure de Tintin publiée en feuilleton au moment même de la création de Bourbaki. Coïncidence ?
[11] Comme sa sœur Simone (L 1928).

qu'Henri Cartan (S 1923) du prestigieux prix Wolf ; Jean Dieudonné (S 1924), archétype du brillant normalien, fit preuve toute sa vie d'une activité surhumaine, commençant ses journées de dix-huit heures par deux heures de piano (passion partagée par Henri Cartan), fin cuisinier de surcroît et sûrement le collaborateur de Nicolas Bourbaki qui s'est le plus investi dans le *traité*.

Je parle du grand projet du groupe, les *Éléments de mathématique* répondant aux *Éléments de mathématiques* d'Euclide. L'élision du *s* signifie que, pour Bourbaki, les mathématiques sont une, comme l'Europe est une – le groupe va chercher chez l'« ennemi » allemand (David Hilbert) la rigueur manquant selon lui aux mathématiciens français[12]. Beaucoup d'intellectuels et d'ingénieurs européens de l'époque ont ainsi monté, contre la folie des dirigeants, des collaborations, voire des utopies européennes[13].

La première phrase des *Éléments*, « Le traité prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes », relève bien sûr de l'imposture : nul ne sait quel est ce *début*, et la notion de *démonstration complète* dépend du temps, du public et des circonstances. Il demeure que le traité a beaucoup contribué à élever le niveau de rigueur dans l'internationale mathématique tout en forgeant à celle-ci un langage commun, souvent très bien trouvé. La rédaction, née des efforts conjugués de mathématiciens de tout premier plan[14], était extrêmement soignée et son parti-pris « structuraliste » a par exemple permis à des domaines comme la topologie générale d'émerger tels que nous les connaissons depuis lors[15].

Sur les fondements des mathématiques, Bourbaki reprend le programme formaliste de Hilbert… peu après que le célèbre théorème d'incomplétude de Gödel (1931) l'a battu en brèche. Je crains que cette imposture-là ne soit involontaire. Elle présente les mathématiques comme une science inhumaine, fondée sur une mécanique qui n'est pas celle de notre cerveau. On prétend en effet réduire celui-ci à sa moitié gauche, celle qui calcule et décortique[16], au détriment de la moitié droite[17] qui ressent et *comprend* – bien que toute activité intellectuelle ou artistique digne de ce nom repose à l'évidence sur des allers et retours entre les deux. Cette idée « canularesque », prise au sérieux par des pédagogues, a bien plus tard *lobotomisé* des générations d'étudiants en mathématiques français.

Chez les membres les plus radicaux du groupe, la déshumanisation des mathématiques va de pair avec un refus de se poser la question de leur sens. « Défense de déposer du sens le long de mes mathématiques », proclame l'un d'eux, paraphrasant le « Défense de déposer des ordures [de la musique] le long de mes vers » faussement attribué à Hugo. Le seul exemple du mouchoir de Lebesgue montre ce que l'on perd à évacuer ainsi un problème essentiel. Il y a

---

[12] Un dégât collatéral est l'invraisemblable sous-estimation d'Henri Poincaré par Bourbaki.
[13] La plus grandiose est le projet *Atlantropa*, où il s'agissait entre autres de construire un barrage hydroélectrique à la place du détroit de Gibraltar et d'irriguer le Sahara. Même si cela fait un peu penser au célèbre dentiste Max Hilaire voulant plomber la Dent du Midi avec le Plomb du Cantal dans *L'idée fixe du savant Cosinus*, le projet fascina. Il est par exemple au cœur du roman *Power for sale* (*Amédée* en français) de John Knittel.
[14] Pour s'en tenir aux médaillés Fields : Laurent Schwartz (S 1934), Jean-Pierre Serre (S 1945), Alexandre Grothendieck, Alain Connes (S 1966), Jean-Christophe Yoccoz (S 1974).
[15] D'autres réussites éclatantes sont les volumes sur la théorie des corps, probablement la meilleure référence sur le sujet, voire la meilleure manière de l'apprendre.
[16] Particulièrement performante chez les très bons élèves.
[17] Particulièrement performante chez Einstein ou Thom.

là, je crois, une confusion entre le « pourquoi » (il faudrait être masochiste pour s'échiner sur un problème dénué de sens) et le « comment » (les bons mathématiciens cherchent et, parfois, trouvent des relations de cause à effet aussi pures que possible, féconde abstraction qui aboutit souvent à un résultat bien plus intéressant que la simple solution du problème initial).

Avec les *Éléments*, la troupe haute en couleurs des collaborateurs de Bourbaki produit une bible un peu grise, dont l'intelligibilité pâtit de ce que des énoncés significatifs, puisqu'ils n'ont pas de sens, sont relégués en exercice. On pense aux collections de papillons (comme celle, célèbre, de Schwartz), où les êtres le plus merveilleusement vivants se retrouvent momifiés. Les magnifiques écrits individuels de Weil ou Serre sont bien meilleurs.

Parmi les impostures du traité figure l'idée que les mathématiques se développent linéairement à partir de leur hypothétique début. Dieudonné tenait beaucoup à ce qui aurait dû rester un canular. Cet homme exquis, bâti comme un ogre, faisait peur aux enfants lors des congrès Bourbaki en piquant une colère très brève mais terrible, assortie de sa démission, dès que l'on faisait mine de toucher au *bon ordre*. Citons Schwartz : « Un jour, Sonia Godement, la femme de Godement[18], a souhaité assister à une démission. On prit rendez-vous pour le lendemain à 10 heures du matin ; à 10 heures moins trois, Godement a dit qu'il fallait mettre l'intégration avant les espaces vectoriels topologiques, Sonia est entrée et a vu Dieudonné, en fureur, donner sa démission. »

Mon impression extérieure est que ces défauts de fond[19] ont amené le traité à s'enliser quelque peu ; de replâtrage en replâtrage, il a déplacé ses objectifs sans avoir atteint le but simple assigné par les fondateurs : établir la géométrie différentielle sur des bases solides, avec comme Graal la formule de Stokes[20]. L'influence considérable du traité à ses débuts s'étant fortement émoussée malgré d'immenses réussites, on peut même se demander si sa rédaction justifie que des esprits aussi éminents y consacrent tant d'efforts.

Juste avant un débat public avec Serre, le grand mathématicien russe Vladimir Arnold se frottait les mains avec un sourire de sale gosse en me disant qu'il commencerait par ces mots : « Je ne parlerai pas de Bourbaki car il ne faut pas dire de mal des morts ». C'était oublier un peu vite que le *Séminaire Bourbaki* a permis et permet toujours à la communauté mathématique internationale de connaître les derniers développements de la science, souvent présentés par des orateurs de tout premier plan, membres ou non du groupe[21], et rédigés avec grand soin. Ces exposés, dont la collection est facilement accessible sur internet, constituent un véritable trésor. Bien sûr, il y a un gros biais dans le choix des « derniers

---

[18] Roger Godement (S 1940).

[19] Aux effets des impostures précédentes s'ajoutent au moins l'absence de la théorie des catégories dans les fondements (qui empêche de traiter l'algèbre homologique dans ce cadre alors que Grothendieck était membre du groupe) et le choix qu'ont fait Schwartz et Dieudonné d'aborder l'intégration par les mesures de Radon et non par les mesures abstraites, fondement naturel de la théorie des probabilités.

[20] C'est sous son propre nom qu'Henri Cartan a publié en 1967 son excellent cours de calcul différentiel; quant au « Graal », c'est le mathématicien franco-américain Serge Lang, autre membre du groupe, qui – utilisant, dit-on, les rédactions préalables au traité – l'a rendu accessible dans son cours *Analysis II* (1969).

[21] Thom, qui n'en faisait pas partie car il s'était endormi quand on lui avait demandé de servir de *cobaye* pour la rédaction du traité, a souvent su exprimer dans ses exposés l'essence d'un résultat bien mieux que son auteur.

développements », qui laisse dans l'ombre ce qui n'intéresse pas le groupe – longtemps, les probabilités et l'analyse « dure », une paille !

Nous touchons ici à l'imposture la plus grave de Bourbaki : si *la mathématique* a salutairement abattu bien des cloisons, elle a aussi érigé un mur entre les « bonnes » mathématiques et les autres[22]. Mur à géométrie variable comme le groupe – remarquablement réactif – mais qui fut à l'origine du clivage entre mathématiques pures et appliquées dont pâtit encore notre communauté. Les avant-gardes, ayant pris le pouvoir, imposent ainsi des préjugés nés comme de brillants paradoxes…

[22] Même Henri Cartan, directeur des études de mathématiques à l'École dont l'influence bénéfique sur son temps ne saurait être surestimée, n'échappait pas au sectarisme : des analystes comme Yves Meyer (S 1957, prix Abel 2017) se sont construits *malgré lui*.