Stabilité structurelle et morphogenèse : quelques remarques

Marc Chaperon
Université Paris 7 & Institut de mathématiques de Jussieu
chaperon@math.jussieu.fr

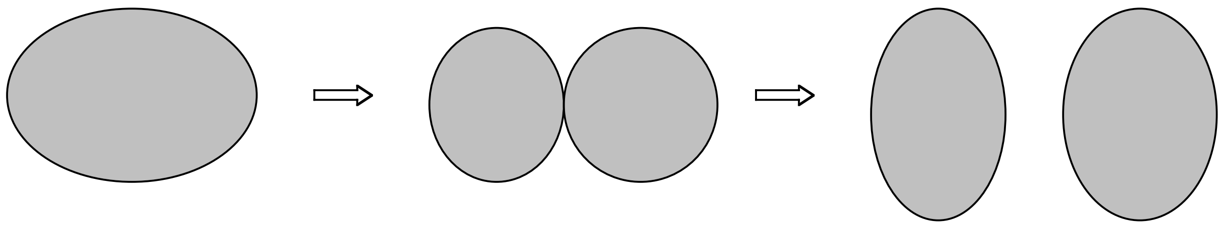
La morphogenèse, c'est-à-dire la manière dont les formes naissent et se modifient, figure indiscutablement parmi les problèmes devant lesquels la science se trouve le plus démunie. Il faut en tenir compte dans toute lecture de l'ouvrage fondateur de René Thom, *Stabilité structurelle et morphogenèse*. Plus que des clefs, son auteur propose des *pistes* : partant d'une œuvre largement consacrée à la morphogenèse en mathématiques, il met en regard les formes ainsi obtenues et celles que l'on observe dans la nature, présentant une sorte de catalogue de voies à explorer.

Les premiers lecteurs, pour la plupart, ne l'ont pas compris, qui oscillaient entre un enthousiasme peu éclairé (« tous les problèmes abordés dans l'ouvrage y trouvent une solution satisfaisante ») et un scepticisme non moins excessif (« Thom a pris ses désirs pour des réalités »).

Trente ans plus tard, il serait temps d'explorer les voies proposées par Thom. C'est un travail scientifique. Le présent exposé y est une introduction assez simplette…

*

Un des exemples les plus élémentaires de morphogenèse (animale, si l'on pense à la mitose des paramécies)



une paramécie — deux paramécies

Figure 1

pose un problème de modélisation mathématique car un ensemble d'une seule pièce (« connexe ») s'y transforme en un ensemble composé de deux morceaux. Si J désigne l'intervalle de temps concerné, il est donc impossible de trouver un espace topologique compact X et une application continue f de $J \times X$ dans l'espace euclidien tels que la ou les paramécies considérées soient, à chaque instant t, l'ensemble des $f(t,x)$ avec x dans X et qu'en outre chaque f soit, à t fixé, une application injective.

Le même problème survient en mécanique des milieux continus, quand on veut modéliser l'apparition de fissures dans un solide :

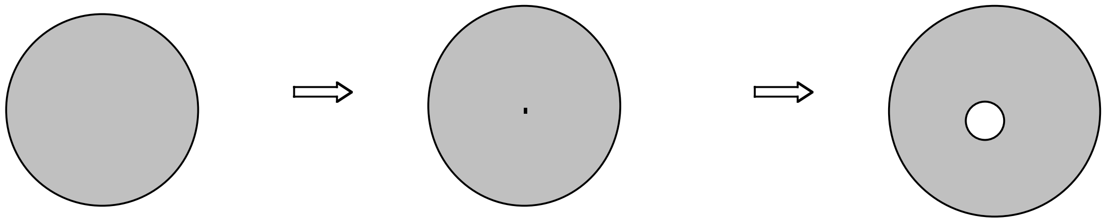


Figure 2

À l'instant de la fissuration, le solide change de forme, puisqu'un « trou » apparaît qui n'existait pas auparavant. Or, pour tout point x du solide à l'instant initial, si l'on désigne par $f(t,x)$ sa position à l'instant t, le formalisme de la mécanique des milieux continus repose sur les deux hypothèses suivantes :

— l'application f ainsi définie est continûment différentiable ;
— pour tout t, l'applications qui à x associe $f(t,x)$ est un plongement.

Ces hypothèses excluent tout changement dans la topologie du solide, c'est-à-dire que le moment de la fissuration échappe à une telle analyse.

Quand les formes changent, elles se prêtent donc très mal à une modélisation comme images *directes* d'applications, modélisation qui suppose la forme connue à chaque instant et évacue donc le problème de la morphogenèse.

En revanche, il est très facile d'obtenir les formes de la figure 1 comme images *inverses* : par exemple, si **T** est un tore de dimension 2 (un « pneu ») posé (comme il se doit) verticalement sur le sol, l'ensemble $N(h)$ des points de **T** situés à la hauteur h au-dessus du sol varie comme suit :

— pour $h < 0$, il est vide ;
— pour $h = 0$, c'est un point ;
— pour $0 < h < a$, où a est le niveau le plus bas du « trou », c'est une courbe fermée (topologiquement, un cercle) analogue au bord de la paramécie avant mitose ;
— pour $h = a$, il ressemble au bord de la (des) paramécie(s) au moment de la mitose ;
— pour $a < h <$ b, où b est le niveau le plus haut du « trou », $N(h)$ est formé de deux courbes fermées, comme le bord des paramécies après mitose.

La topologie différentielle, où René Thom s'est illustré, fournit donc des modèles mathématiques de la morphogenèse. Nous en verrons d'autres.

Répétons que la morphogenèse est un des problèmes physiques le moins étudiés. En l'état actuel de nos connaissances, des « modèles » comme le précédent ne sont pas des modèles au sens de la physique sérieuse, mais on peut espérer que certains d'entre eux constituent le point de départ qui jusque là faisait défaut à celle-ci : à l'origine d'une théorie physique se trouve bien souvent l'analogie entre les observations effectuées et les phénomènes mathématiques « en stock ». C'est, je crois, un tel « stock » que *Stabilité structurelle et morphogenèse* prétendait constituer. Il a depuis lors été considérablement augmenté, en particulier par V. I. Arnold et ses élèves.

Tout un pan de l'ouvrage repose sur l'idée que les « parois » qui délimitent les formes biologiques (êtres vivants, cellules, etc.) sont des *ensembles de Maxwell* : si E désigne l'espace euclidien (ou l'espace-temps), Thom postule l'existence d'une variété X et d'une fonction réelle (très) différentiable V sur $E \times X$ telles que la paroi considérée soit l'ensemble de Maxwell de V ; en désignant par $V(p)$ la fonction réelle qui à x associe $V(p,x)$, il nomme ainsi l'ensemble des points p de E tels que la fonction $V(p)$ atteigne son minimum absolu en plus d'un point de X , ou en un point x où la dérivée seconde $V(p)''(x)$ soit dégénérée.

Ce « modèle » explique l'importance accordée par Thom aux *catastrophes élémentaires*, c'est-à-dire aux singularités *génériques* (inévitables) de familles de potentiels dépendant d'au plus quatre paramètres (l'espace-temps est de dimension 4).

L'origine historique de la terminologie se trouve en thermodynamique classique, où la « règle de Maxwell » (Thom parle de « convention de Maxwell ») aboutit aux classiques diagrammes de phases — et à la règle des phases de Gibbs :

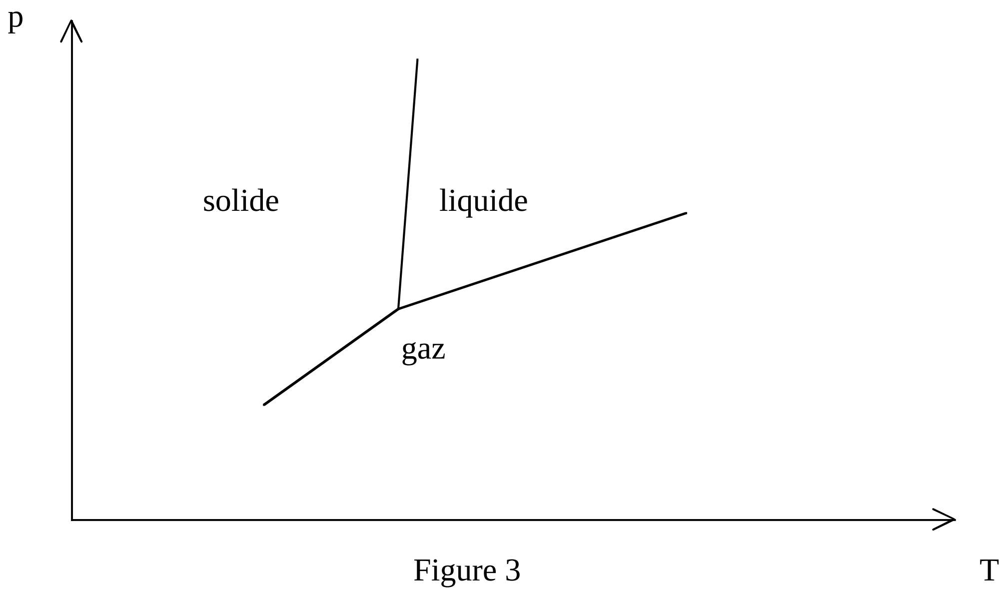


Figure 3

À sa manière elliptique, Thom suggère donc une « spatialisation » de la thermodynamique classique, théorie éminemment non spatiale (le diagramme précédent est tracé dans un espace qui n'a rien à voir avec « le nôtre »).
La théorie des singularités permet de savoir à quoi ressemblent en général les ensembles de Maxwell. En dimension 2 , la figure 3 en fournit un bon exemple. En dimension 3 , on observe de même des arêtes de points triples (où trois minima non dégénérés sont en compétition, comme au point triple de la figure 3) et des points quadruples, où le conflit a lieu entre quatre minima non dégénérés.

La mathématicienne américaine Jean Taylor a montré que les surfaces minimales (réalisables expérimentalement par des pellicules d'eau savonneuse) présentaient génériquement de telles singularités, ce que Thom ne manque pas de signaler. Même dans un problème aussi mathématique, la remarque reste pour l'instant de l'ordre de l'analogie : loin de faire apparaître les surfaces minimales comme des ensembles de Maxwell, Jean Taylor adopte une démarche classique en calcul des variations : elle commence par minimiser l'aire dans un monstrueux espace « fourre-tout », formé de *varifolds* (objets dont la topologie n'est pas limitée *a priori*, ce qui évite les difficultés soulevées au début de cet exposé), puis montre que l'objet d'aire minimale dans cet espace n'est pas si monstrueux. Cette approche étant extrêmement technique, l'idée d'obtenir les surfaces minimales comme ensembles de Maxwell est un rêve tentant, mais elle reste de l'ordre du rêve… Thom termine d'ailleurs son ouvrage par cette phrase, typique de son mélange de modestie et d'orgueil : « Au moment où tant de savants calculent de par le monde, n'est-il pas souhaitable que d'aucuns, qui le peuvent, rêvent ? ».

Plus généralement, ces singularités sont celles des surfaces à courbure moyenne constante comme les parois des cellules vivantes (ainsi que l'a remarqué D'Arcy Thompson)… ou les bulles de savon, comme on le voit en agitant une bouteille de shampoing.

On a reproché à Thom et Zeeman de plaquer des modèles géométriques sur diverses situations sans chercher à en comprendre la structure interne. Leur attitude était pourtant assez largement justifiée par l'ignorance presque totale dont nous avons parlé. En psychanalyse, par exemple, je reste persuadé que ces modèles (par exemple celui de l'anorexie par Zeeman) valent infiniment mieux que la plupart des discours et peuvent conduire à de réels progrès.

Les conquêtes spectaculaires de la biologie moléculaire ont quelque peu rejeté dans l'ombre les tentatives (dont celle de Thom) de s'attaquer au macroscopique, mais il faudrait être bien naïf pour prétendre connaître celui-ci uniquement à partir du microscopique : même le plus simple des problèmes de ce type (reconstituer la thermodynamique d'un gaz parfait à partir de la mécanique de ses molécules) n'est toujours pas résolu.

Feynman l'a fort bien dit dans son discours de réception du prix Nobel : les niveaux de la physique (le très petit, le moyen et le très grand) ne communiquent que partiellement entre eux et chacun de ces niveaux, comme dans le passé, mérite toute notre attention. Le clonage de brebis, voire d'animaux (encore) supérieurs, ne doit pas nous dissimuler notre ignorance profonde des mécanismes de différenciation cellulaire qui aboutissent à un organisme aussi complexe à partir d'une cellule unique. Il n'est pas certain que la géométrie n'ait pas un rôle déterminant à jouer si l'on veut lever cette ignorance. La piste, en tout cas, mérite d'être explorée ; je ne suis pas sûr qu'elle l'ait été avec toute l'attention requise.

*

À une époque où les machines font déjà beaucoup mieux que notre cerveau gauche, Thom affirme au fond la primauté de ce qui fait défaut à ces machines : notre cerveau droit, celui de la compréhension globale… et de la géométrie. C'est cette position de David géomètre face au Goliath algébriste, assumée (et avec quel succès !) pendant toute une vie de très grand mathématicien, qui reste d'actualité. Les détails, les modèles peut-être parfois hâtifs, n'ont que peu d'importance : Thom ne nous rappelle-t-il pas, citant Valéry, que « la vie n'a pas le temps d'attendre la rigueur » ? Restent l'idée simple et indiscutable que seul se produit l'inévitable (ou plutôt ce qu'il aurait fallu faire un assez grand détour pour éviter), et une œuvre mathématique largement consacrée à le décrire et à le classifier.

L'ensemble de l'œuvre de Thom (mathématique ou non) sera bientôt disponible sous la forme d'un CD Rom publié par EDP Sciences.