Université Paris Diderot Paris 7
Département de Sciences Exactes
L2 MASS
MA3 – Année 2011/12

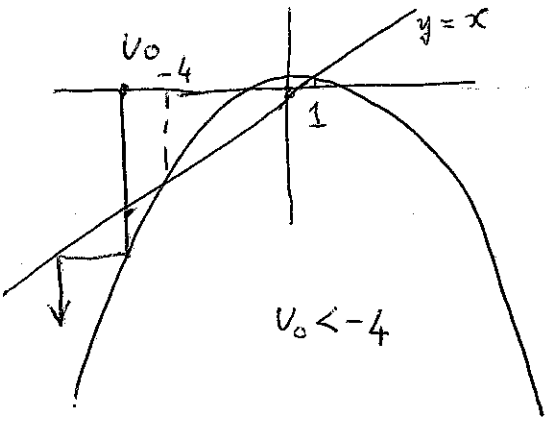
Un corrigé du partiel du 29 octobre 2011

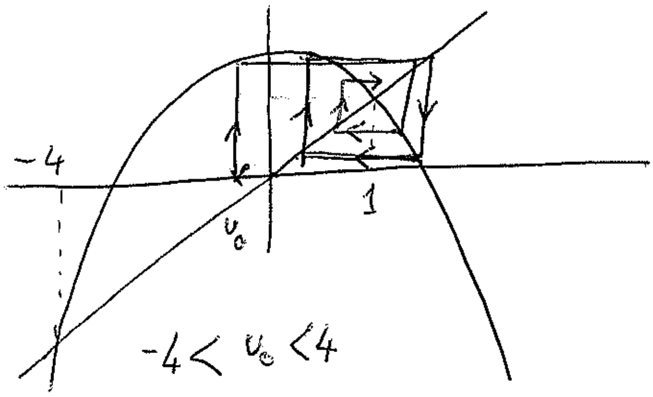
(suites, séries numériques et séries de fonctions)

Exercice 1 (Suites récurrentes) *On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par sa valeur initiale $u_0 \in \mathbb{R}$ et en imposant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.*

1. *Étudier la fonction $f(x) = \frac{1}{3}(4-x^2)$; en particulier déterminer quand $x > f(x)$, respectivement $x < f(x)$ ou $x = f(x)$.*

   Le graphe $y = f(x)$ est une parabole renversée, symétrique par rapport à l'axe des y ; elle rencontre la droite $y = x$ pour $x = 1$ et $x = -4$. Pour $x \in]-4, 1[$ on a $f(x) > x$ alors que pour $x < -4$ ou $x > 1$ on a $x < f(x)$. Le graphe suggère que la suite est divergente vers $-\infty$ si $|u_0| > 4$ et convergente vers $+1$ lorsque $|u_0| < 4$. Les questions suivantes justifient le dessin.





2. *Montrer que si u_n est convergente, alors sa limite vaut $\ell = +1$ ou $\ell = -4$.*

   Comme f est continue, si $\ell = \lim u_n$ on a $\ell = \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(\ell)$. Or ici $f(x) = x$ s'écrit $x = \frac{1}{3}(4-x^2)$ ou encore $x^2 + 3x - 4 = 0$, ce qui équivaut à $x = +1$ ou -4.

3. *Montrer que si $|u_0| > 4$ alors la suite tend vers moins l'infini.*

   Si $u_0 > 4$ alors $u_1 < -4$ donc on peut se ramener au cas $u_0 < 4$. On a alors $u_1 = f(u_0) < u_0 < -4$. On voit par récurrence que $u_{n+1} f(u_n) < u_n < -4$, c'est-à-dire que la suite est décroissante ; si elle était minorée, elle serait convergente vers une valeur $\ell < -4$, ce qui est impossible. On conclut que la suite tend vers moins l'infini.

4. *Montrer si $u_0 = +1$ ou $u_0 = -4$ alors la suite est constante, et vérifier que si $u_0 = 4$ alors $u_1 = -4$.*

   On a déjà vu que $+1$ et -4 étaient fixes par f, le premier point est donc clair ; on vérifie aussi que $f(4) = f(-4) = -4$.

5. *Montrer que si $|u_0| < 4$ alors la suite u_n est convergente de limite $+1$.*

   Notons que $u_n \leqslant 4/3$ pour $n \geqslant 1$. Si disons $u_n \in]-4, -1[$ alors $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$ et la suite croit donc jusqu'à dépasser -1. On peut donc supposer qu'à un certain rang $u_{m_0} \in [-1, 4/3]$; le dessin suggère qu'alors la suite converge en alternant autour de $+1$. Pour prouver cela, calculons $f \circ f(x) = \frac{1}{27}(20 + 8x^2 - x^4)$, notons que $f \circ f(x) > x$ équivaut à $x^4 - 8x^2 + 27x - 20 < 0$; on sait que $+1$ et -4 sont racines du polynôme de gauche donc on peut encore remplacer la condition par $(x-1)(x+4)(x^2 - 3x + 5) < 0$ ou encore par $(x-1)(x+4) < 0$ puisque $x^2 - 3x + 5$ n'a pas de racine réelle. Si disons $u_{m_0} \in]-1, +1[$ alors $(u_{m_0+2k})_{k\geqslant 0}$ est une suite croissante majorée par 1 donc convergente (et convergente vers $+1$) ; Si disons $u_{m_0} \in]+1, 4/3[$ alors $(u_{m_0+2k})_{k\geqslant 0}$ est une suite décroissante minorée par 1 donc convergente (et convergente vers $+1$) ; dans tous les cas on trouve que la suite converge vers $+1$.

Exercice 2 (Séries numériques) *Déterminer lesquelles des séries suivantes sont convergentes, absolument convergentes ou divergentes.*

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right);\quad \sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\log(n+1)}-\sqrt{\log n};\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{4^n}+\frac{1}{n}\right);\quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n(\log n)^2}{n}.$$

Les trois premières séries sont à termes positifs, la quatrième est une série alternée.

1. La suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1$ tend vers $e-1$; en effet $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ tend vers 1. La série diverge donc “grossièrement”.
2. On peut raisonner par équivalent :

$$\sqrt{\log(n+1)}-\sqrt{\log n} = \frac{\log(n+1)-\log n}{\sqrt{\log(n+1)}+\sqrt{\log n}} = \frac{\log(1+1/n)}{\sqrt{\log(n+1)}+\sqrt{\log n}} \sim \frac{1}{2n\sqrt{\log n}}$$

   Or la série de terme $\frac{1}{2n\sqrt{\log n}}$ est divergente (série de Bertrand ou comparaison avec un intégrale) donc la série étudiée est divergente.
3. La série harmonique des $1/n$ est divergente alors que la série de terme général $n4^{-n}$ est convergente (par exemple en appliquant le critère de D'Alembert) donc la troisième série est divergente.
4. Posons $a_n = \frac{(\log n)^2}{n}$. La fonction $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{\log x(2-\log x)}{x^2}$ qui est négative pour x assez grand ($x \geqslant e^2$ suffit) donc la suite a_n est décroissante pour n assez grand. On peut appliquer le théorème des séries alternées et conclure que la quatrième série converge. Par contre elle n'est pas absolument convergente.

Exercice 3 (Comparaison intégrale/série) *Soit $a \in \mathbb{R}$ on se propose d'étudier les séries et intégrales*

$$S(a) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{1+n^2} \quad \text{et} \quad I(a) := \int_1^{\infty}\frac{x^a}{1+x^2}dx := \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{x^a}{1+x^2}dx. \tag{1}$$

1. *Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série $S(a)$ est-elle convergente ?*

   La série est à termes positifs et équivalents à n^{a-2} qui est le terme d'une série de Riemann. La série est donc convergente si et seulement si $a < 1$.
2. *Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x^a}{1+x^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty)$ si $a < 1$.*

   On calcule

$$f'(x) = \frac{ax^{a-1}+ax^{a+1}-2x^{a+1}}{(1+x^2)^2} \leqslant \frac{2(a-1)x^{a+1}}{(1+x^2)^2} \leqslant 0.$$

   [Note : L'énoncé initial demandait (par erreur) de montrer cela pour $a < 2$; en fait le même calcul montre que, lorsque $1 \leqslant a < 2$, la fonction est décroissante pour $x \geqslant \sqrt{a/(2-a)}$]
3. *Démontrer les inégalités $I(a) \leqslant S(a) \leqslant I(a)+\frac{1}{2}$.* On applique les techniques de comparaison intégrales séries : comme f est décroissante $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$. En sommant de $k = 1$ à l'infini on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

   ou encore, en remarquant que $f(1) = \frac{1^a}{1+1^2} = \frac{1}{2}$

$$S(a)-\frac{1}{2} \leqslant I(a) \leqslant S(a).$$

4. *En déduire que l'intégrale (1) est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a \geqslant 1$.*

   Le cas $a \geqslant 2$ est trivial puisque la fonction $f(x) = \frac{x^a}{1+x^2}$ tend vers l'infini (resp. vers +1) si $a > 2$ (resp. si $a = 2$ et donc intégrale et série divergent. Lorsque $a < 2$, l'intégrale est de même nature que la série (la fonction $f(x)$ est décroissante à partir d'un certain rang, donc est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a \geqslant 1$.

Exercice 4 (Convergence simple, équivalents) *Soit $a > 0$, on étudie la série*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$$

1. *Pour quelles valeurs de a la série est-elle absolument convergente ?*

   Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$, alors $|a_n| = \frac{1}{n^a+(-1)^n} \sim \frac{1}{n^a}$ donc la série est absolument convergente si et seulement si $a > 1$.

2. *Montrer que*

$$\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + O\left(\frac{1}{n^{3a}}\right) \tag{2}$$

   En déduire que la série converge pour $a > 1/2$ et diverge pour $a \leqslant 1/2$.

   On utilise le développement limité $(1+u)^{-1} = 1 - u + O(u^2)$ au voisinage de zéro. Ceci permet d'écrire

$$\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + O\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} + O\left(\frac{1}{n^{3a}}\right).$$

   Décomposons $a_n = b_n + c_n$ avec $b_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$ et donc $c_n = -\frac{1}{n^{2a}} + O\left(\frac{1}{n^{3a}}\right) \sim -\frac{1}{n^{2a}}$. Le théorème des séries alternées permet de conclure que $\sum_n b_n$ est convergente (puisque $a > 0$) et le critère des équivalents (noter que le signe de c_n est constant, au moins pour n assez grand) permet de conclure que $\sum_n c_n$ est convergente pour $2a > 1$ et divergente quand $2a \leqslant 1$. On conclut que lorsque $a > 1/2$ la série $\sum_n a_n$ est convergente puisque somme de deux séries convergentes, alors que lorsque $a \leqslant 1/2$ la série $\sum_n a_n$ est divergente puisque somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Remarque. On pouvait aussi explicitement calculer "c_n" :

$$c_n := \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^a} = \frac{-1}{n^a(n^a + (-1)^n)}$$

et montrer ainsi que la série $\sum_n c_n$ est convergente si et seulement si $a > 1/2$.

Exercice 5 (Séries de fonctions : convergence normale) *On définit (pour x réel) les séries de fonctions :*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^3 + n^2} \qquad \text{et} \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + n}.$$

1. *Montrer que ces deux séries convergent normalement sur tout l'intervalle $[0, +\infty)$ et y définissent des fonctions continues. Les séries convergent-elles pour $x < 0$?*

   On utilise la majoration $e^{-nx} \leqslant 1$ (valable pour tout $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$ et le fait que les séries numériques $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ sont convergentes pour conclure que les séries $S(x)$ et $T(x)$ sont normalement convergentes sur tout l'intervalle $[0, +\infty)$. Les fonctions e^{-nx} sont continues donc, d'après les résultats du cours, la convergence normale entraîne que les fonctions $S(x)$ et $T(x)$ sont continues sur $[0, +\infty)$. Lorsque $x < 0$ les deux séries sont par contre "grossièrement" divergentes puisque e^{-nx}/n^a tend vers $+\infty$.

2. *Calculer $T(0)$ (on pourra observer que $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).*

   On calcule

$$T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

3. *Montrer que $S(x)$ est dérivable et que $S'(x) = -T(x)$.*

   Posons $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^3+n^2}$, on a alors $S(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x)$ et $-T(x) = \sum_1^{\infty} f_n'(x)$. La séries des $f_n'(x)$ est normalement convergente et la série des $f_n(x)$ est convergente (la convergence en un point suffirait) donc d'après le théorème du cours la série $S(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x)$ est dérivable et sa dérivée est bien $S'(x) = \sum_1^{\infty} f_n'(x)$.

4. *Conclure que, au voisinage de 0 on a $S(x) = S(0) - x + o(x)$.*

Le théorème des accroissements finis permet d'écrire $S(x) - S(0) = xS'(c)$ avec un $c \in (0, x)$ qui dépend de x. De Plus $S'(c) = -T(c)$ et T est continue au voisinage de 0 (pour les valeurs positives) donc, lorsque x tend vers zéro, c tend également vers zéro et donc $-T(c)$ tend vers $-T(0) = -1$. On obtient donc bien $S(x) = S(0) - xT(c) = S(0) - x(1 + o(1)) = S(0) - x + o(x)$.

Exercice 6 (Séries entières) *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!(n+1)!} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \pi^n\right) x^n$$

Notons que $\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$. On voit aisément que $\lim_n \sqrt[n]{\frac{2}{n(n+1)}} = 1$ donc, d'après le critère de Cauchy, le rayon de convergence de la première série est 1. On pouvait aussi appliquer le critère de D'Alembert ou encore comparer le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{n(n+1)}$ a celui de ses dérivées. En effet $S(x)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{n-1}}{n+1}$ et $(x^2S'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$ ont le même rayon de convergence et le dernier est clairement égal à 1.

Pour la deuxième, le plus simple est d'utiliser le critère de d'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!(2n)!(n+1)!}{(3n)!(2n+2)!(n+2)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+2)}, \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27}{4},$$

donc le rayon de convergence de la série est $\frac{4}{27}$.

Pour la troisième série le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est 1 et le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n x^n$ est $1/\pi$ donc le rayon de convergence de la somme des deux est $\min(1, 1/\pi) = 1/\pi$.