Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Un corrigé du devoir à la maison (révisions en vue de l'examen)

Exercice 1 [Algèbre linéaire I] *Soit l'application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(x, y, z) = (-2x + 5y - z, -2x + 2y + 2z, -2x + 5y - z).$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

$$\text{(réponse :)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Montrer que* $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ *et trouver un générateur* v_1 *de* $\mathrm{Ker}(f)$. On commence par résoudre le système linéaire $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$; on réduit le système [détails du calcul omis] au système $y = z$, $x = 2y$ et conclut que, puisqu'il y a une seule variable libre, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et qu'une base est fournie par le vecteur (obtenu en fixant $y = 1$) $v_1 = (2, 1, 1)$.

3. *Déterminer la dimension de* $\Im m(f)$ *et une équation de l'image.* D'après le théorème de la dimension, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \Im m(f)$ donc $\dim \Im m(f) = 2$. Un vecteur (a, b, c) est dans l'image de f si et seulement si le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} -2x + 5y - z &= a \\ -2x + 2y + 2z &= b \\ -2x + 5y - z &= c \end{cases}$$

Appliquons pour cela la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & a \\ -2 & 2 & 2 & b \\ -2 & 5 & -1 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -b/2 \\ 0 & 3 & -3 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -b/2 \\ 0 & 1 & -1 & (a-b)/3 \\ 0 & 0 & 0 & c-a \end{pmatrix}$$

Si $c - a \neq 0$ il y a un pivot sur la dernière colonne et donc aucune solution, si $c - a = 0$ il y a des solutions, ainsi un vecteur (a, b, c) est dans l'image si et seulement si $c - a = 0$.

4. *Montrer qu'il existe un vecteur non nul* v_2 *tel que* $f(v_2) = 2v_2$ *; montrer de même qu'il existe un vecteur non nul* v_3 *tel que* $f(v_3) = -3v_3$. On doit résoudre successivement les systèmes $\begin{cases} -2x + 5y - z &= 2x \\ -2x + 2y + 2z &= 2y \\ -2x + 5y - z &= 2z \end{cases}$ puis $\begin{cases} -2x + 5y - z &= -3x \\ -2x + 2y + 2z &= -3y \\ -2x + 5y - z &= -3z \end{cases}$; les solutions du premier forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $v_2 = (1, 1, 1)$, les solutions du deuxième forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $v_3 = (1, 0, 1)$ [calculs omis].

5. *Montrer que* v_2, v_3 *forment une base de* $\Im m(f)$. Tout d'abord les vecteurs v_2 et v_3 appartiennent à $\Im m(f)$ (ou bien on remarque qu'ils vérifient l'équation trouvée au point 3 ou bien on utilise la question précédente qui donne $v_2 = f(v_2/2)$ et $v_3 = f(-v_3/3)$). L'espace vectoriel $\Im m(f)$ est de dimension 2, donc deux vecteurs de cet espace forment une base si et seulement si ils sont indépendants. Or $av_2 + bv_3 = 0$ équivaut $a + b = a = a + b = 0$ et donc $a = b = 0$.

6. *Posons* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *, vérifier que c'est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$. On peut vérifier directement que les trois vecteurs sont linéairement indépendants ou procéder ainsi : si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ alors $f(av_1 + bv_2 + cv_3) = 2bv_2 - 3cv_3 = 0$ donc, puisque v_2 et v_3 sont indépendants $b = c = 0$ et donc $a = 0$. Pour calculer la matrice de f dans la nouvelle base on peut soit utiliser la formule de changement de bases (en calculant matrice de passage etc.) soit revenir à la définition (ce qui est le plus simple ici) : écrivons

$$f(v_1) = 0 = 0.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3, \quad f(v_2) = 2v_2 = 0.v_1 + 2.v_2 + 0.v_3, \quad f(v_3) = -3v_3 = 0.v_1 + 0.v_2 + (-3).v_3$$

donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 [Algèbre linéaire II] *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée dans les bases canoniques par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que les vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^3$*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette nouvelle base. Il suffit de vérifier que les trois vecteurs sont linéairement indépendants ; pour cela on résoud le système $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ et constate que la seule solution est $a = b = c = 0$. La matrice de passage de la base canonique vers la nouvelle base s'obtient en écrivant en colonne les vecteurs de celle-ci :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Montrer de même que les vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^2$*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et écrire la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette nouvelle base. On vérifie de même que w_1 et w_2 sont indépendants et on écrit :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Calculer la matrice B de f dans les bases v_1, v_2, v_3 et w_1, w_2.* On peut procéder de deux manières. Premièrement on peut utiliser la formule de changement de bases qui s'écrit ici (Cf Cours)

$$B = Q^{-1}AP.$$

On doit donc calculer $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et effectuer le produit

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 32 \\ -4 & -6 & -22 \end{pmatrix}.$$

Deuxièmement on peut revenir à la définition, écrire

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = aw_1 + bw_2, \; f(v_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = a'w_1 + b'w_2, \; f(v_3) = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \end{pmatrix} = a''w_1 + b''w_2$$

et donc $B = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$ et calculer les coefficients a, b, a', b', a'', b''.

Exercice 3 [Développements limités] *Calculer les limites suivantes*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{1 - \sqrt{x - \log(1 + x)}}$;

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,2x}{x(1-\cos 3x)}$

1. On a $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$, $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ et $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + o(u)$ donc $\sqrt{1-x^2} = 1 - x^2/2 + o(x^2)$. Ainsi
$$\frac{e^x - \cos x}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x + x^2 + o(x^2)}{x^2/2 + o(x^2)} = 2\frac{1 + x + o(x)}{x + o(x)}.$$
On conclut que lorsque x tend vers zéro par valeurs positives (resp. par valeurs négatives) la fonction tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).
2. Un calcul similaire donne $e^x - \cos x - x = x^2 + o(x^2)$ alors que $\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ donc $x - \log(1+x) = x^2/2 + o(x^2)$ et donc $\sqrt{x - \log(1+x)} = \sqrt{x^2/2 + o(x^2)} = |x|(1 + o(1))$ tend vers zéro ; on obtient ainsi que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{1 - \sqrt{x - \log(1+x)}} = 0$;
3. On sait que $\mathrm{tg}\,x = x + x^3/3 + o(x^3)$ donc $2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,2x = 2x - 2x^3/3 - (2x) - (2x)^3/3 + o(x^3) = -2x^3 + o(x^3)$; d'autre part $x(1-\cos 3x) = x(1 - (1 - (3x)^2/2 + o(x^2))) = x(9x^2/2 + o(x^2)) = 9x^3/2 + o(x^3)$ et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,2x}{x(1-\cos 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{9x^3/2 + o(x^3)} = -\frac{4}{9}.$$

Exercice 4 [Calcul intégral] *On rappelle les formules suivantes, où on note $t := \mathrm{tg}(x/2)$:*
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :*
$$f(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X+1)(X+2)}.$$
la décomposition en éléments simples est *a priori* de la forme
$$f(X) = E(X) + \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+2} + \frac{CX + D}{X^2+1}.$$
Le polynôme $E(X)$ est nul car le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur (en général le polynôme $E(X)$ est le quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur). On calcule ensuite séparément les coefficients :
$$A = [(X+1)f(X)]_{X=-1} \left[\frac{1}{(X+2)(X^2+1)}\right]_{X=-1} = \frac{1}{2}.$$
$$B = [(X+2)f(X)]_{X=-2} \left[\frac{1}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=-2} = -\frac{1}{5}.$$
$$Ci + D = \left[(X^2+1)f(X)\right]_{X=i} \left[\frac{1}{(X+2)(X+1)}\right]_{X=i} = \frac{1}{(i+2)(i+1)} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$
D'où le résultat
$$f(X) = \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{5(X+2)} + \frac{-3X+1}{10(X^2+1)}.$$
2. *Déterminer une primitive de f.* On intègre terme à terme la décomposition, ce qui donne :
$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{5}\log|x+2| - \frac{3}{20}\log|x^2+1| + \frac{1}{10}\mathrm{Arctg}\,x + C.$$
3. *A l'aide d'un changement de variables, calculer l'intégrale :*
$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\sin x + \cos x)(2 + 2\cos x + \sin x)}dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$ suggéré dans le préambule en se souvenant que $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et en observant que la valeur $x = 0$ correspond à $t = 0$ et la valeur $x = \pi/2$ correspond à $t = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\sin x+\cos x)(2+2\cos x+\sin x)} dx = \int_0^1 \frac{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(2+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t^2+1)} = \left[\log|x+1| - \frac{2}{5}\log|x+2| - \frac{3}{10}\log|x^2+1| + \frac{1}{5}\operatorname{Arctg} x\right]_0^1$$

que l'on peut simplifier en

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\sin x+\cos x)(2+2\cos x+\sin x)} dx = \frac{11}{10}\log 2 - \frac{2}{5}\log 3 + \frac{\pi}{20}.$$

Exercice 5 *Trouver l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de définition de celles-ci :*

1. $y' = xy^2$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $y'' + 4y = \cos(x) + \sin(2x) + x + e^{2x}$.

1. La première équation n'est pas linéaire mais est à variables séparées : lorsque $y \neq 0$ on peut la réécrire $-\frac{y'}{y^2} = -x$ ou encore en intégrant $y^{-1} = -x^2/2 + C_1$ ou encore en posant $C = 2C_1$:

   $$y(x) = \frac{2}{C - x^2}.$$

   Cette solution est définie sur tout $\mathbb{R}$ lorsque $C < 0$ mais, si $C \geqslant 0$ elle n'est pas définie en $x = \pm\sqrt{C}$. Il ne faut pas oublier la solution "triviale" $y = 0$.
2. La deuxième équation est une équation linéaire du premier ordre. On commence par résoudre l'équation homogène associée : $xy' + y = 0$ qui a pour solutions les fonctions $y(x) = C/x$. Pour trouver les solutions de l'équation initiale on peut utiliser la méthode de la variation de la constante et chercher une solution de la forme $y(x) = C(x)/x$. On trouve qu'il s'agit d'une solution si et seulement si $C'(x) = \cos x$ ou encore $C(x) = \sin x$ à une constante près. L'ensemble des solutions est donc donné par les fonctions

   $$y(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}.$$

   Remarquons que ces solutions ne sont pas définies en zéro lorsque $C \neq 0$ mais on peut montrer que la fonction $y(x) = \frac{\sin x}{x}$, prolongée par la valeur $y(0) = 1$, est bien dérivable et solution sur tout $\mathbb{R}$.
3. La troisième équation est une équation linéaire du second ordre. On commence par résoudre l'équation homogène associée : $y'' + 4y = 0$. L'équation caractéristique $X^2 + 4 = 0$ possède deux racine complexes $2i$ et $-2i$, donc les solutions complexes sont données par $y(x) = A_1 e^{2ix} + A_2 e^{-2ix}$ tandis que les solutions réelles sont données par

   $$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

   Pour trouver les solutions de l'équation initiale on peut utiliser la méthode de variation des constantes ou chercher une solution particulière ; de plus on peut utiliser le "principe de superposition" et chercher une solution particulière $y_1(x)$ (resp. $y_2(x)$ resp. $y_3(x)$, resp. $y_4(x)$) de l'équation $y'' + 4y = \cos(x)$ (resp. $= \sin 2x$, resp. $= x$, resp. $= e^{2x}$) et on obtiendra une solution particulière de l'équation initiale en prenant $y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x)$.
   - Si $y_1(x) = a\cos x$ alors $y_1'' + 4y_1 = 3a\cos x$ donc on peut choisir $a = 1/3$ et $y_1(x) = \frac{\cos x}{3}$.
   - Si $y_3(x) = bx$ alors $y_3'' + 4y_3 = 4bx$ donc on peut choisir $b = 1/4$ et $y_3(x) = \frac{x}{4}$.
   - Si $y_4(x) = ce^{2x}$ alors $y_4'' + 4y_4 = 8ce^{2x}$ donc on peut choisir $y_4(x) = \frac{e^{2x}}{8}$.
   - Le calcul de $y_2(x)$ est plus subtil car $\sin(2x)$ est solution de l'équation homogène, on cherche donc une solution de la forme $y_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$ et on calcule $y_2'' + 4y_2 = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x$; on choisit donc $A = -1/4$ et $B = 0$, c'est-à-dire $y_2(x) = -\frac{x\cos 2x}{4}$

On obtient finalement les solutions de l'équation initiale sous la forme

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{\cos x}{3} - \frac{x\cos 2x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{e^{2x}}{8}.$$