

Les exercices sont indépendants et le barème est indicatif. Les documents autorisés sont le photocopié, les notes de cours et de TD. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note dans cet exercice un élément de \mathbf{R}^3 comme un vecteur ligne.

Soit l'application linéaire de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, -2x + 3y - z, x + y - 2z).$$

- 1.a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de \mathbf{R}^3 .
- 1.b) Montrer que $\dim \text{Ker}(f) = 1$ et trouver un générateur w_1 de $\text{Ker}(f)$.
- 1.c) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$ et une équation de l'image.
- 1.d) Montrer qu'il existe un vecteur non nul w_2 tel que $f(w_2) = 4w_2$; montrer de même qu'il existe un vecteur non nul w_3 tel que $f(w_3) = -w_3$.
- 1.e) Vérifier que $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de \mathbf{R}^3 et déterminer la matrice B de f dans cette nouvelle base.
- 1.f) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{B} et calculer son inverse.
- 1.g) Écrire la relation liant A , B et P et vérifier ainsi le calcul fait en 1.e.

Exercice 2 : développements limités (3 points)

- 2.a) Donner le D. L. en zéro de la fonction $\text{arctg } x$ à l'ordre 5 (on expliquera comment on l'obtient).
- 2.b) Calculer la dérivée quatrième et cinquième de $\text{arctg } x$ en $x = 0$.
- 2.c) Calculer la limite suivante

$$\ell := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x - \sin x}{x^3}.$$

- 2.d) On définit la fonction f par $f(x) = \frac{\text{arctg } x - \sin x}{x^3}$, si $x \neq 0$ et enfin $f(0) = \ell$ (où ℓ est la limite calculée à la question précédente). Déterminer la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à sa tangente en $x = 0$.

Exercice 3 : calcul intégral (5 points)

On rappelle que, lorsque $t = \operatorname{tg}(x/2)$, on a les formules $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. On pourra utiliser la valeur $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$.

3.a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)}.$$

3.b) Déterminer une primitive de f .

3.c) À l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale:

$$I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1 + \sin x)} dx.$$

Exercice 4 : équations différentielles (5 points)

Trouver l'ensemble des solutions (réelles) $y(x)$ des équations différentielles suivantes.

4.a) $y' - \cos^2(y) = 0$.

4.b) $xy' - y = x^2$.

4.c) $y'' + 4y = 1 + \sin(x) + \sin(2x)$.

Exercice 5 (exercice complémentaire)

Déterminer si la limite suivante existe et, le cas échéant, sa valeur :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n \operatorname{sh}(x) dx.$$