Université Denis Diderot Paris 7

Un corrigé de l'examen du 20 mai 2011

Cours de Mathématiques, MI2, première année (L1- Info)

Certains détails de calculs sont omis de ce corrigé.

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note dans cet exercice un élément de $\mathbf{R}^3$ comme un vecteur ligne.

Soit l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, -2x + 3y - z, x + y - 2z).$$

1.a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1.b) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ *et trouver un générateur w_1 de* $\mathrm{Ker}(f)$.

1.c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ *et une équation de l'image.*

1.d) Montrer qu'il existe un vecteur non nul w_2 tel que $f(w_2) = 4w_2$; montrer de même qu'il existe un vecteur non nul w_3 tel que $f(w_3) = -w_3$.

1.e) Vérifier que $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer la matrice B de f dans cette nouvelle base.

1.f) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse.

1.g) Écrire la relation liant A, B et P et vérifier ainsi le calcul fait en 1.e.

1.a) On obtient immédiatement à partir de la définition de la matrice d'une application linéaire :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.b) On doit résoudre le système linéaire $2x - y - z = -2x + 3y - z = x + y - 2z = 0$, ce qui donne (par un calcul de pivot) $x - z = y - z = 0$ d'où $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et on peut choisir comme générateur $w_1 = (1, 1, 1)$.

1.c) La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $\dim \mathrm{Im}(f) = 3 - \dim \mathrm{Ker}(f) = 2$; pour trouver une équation de l'image, on résoud le système $f(x, y, z) = (a, b, c)$ et on trouve une solution en x, y, z à condition que $5a + 3b - 4c = 0$, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Im}(f) = \{(a, b, c) \mid 5a + 3b - 4c = 0\}.$$

1.d) La recherche des solutions du système linéaire $f(x, y, z) = (4x, 4y, 4z)$ donne un espace vectoriel de dimension un dont une base est donnée par $w_2 := (-7, 13, 1)$ et qui vérifie donc $f(w_2) = 4w_2$; la recherche des solutions du système linéaire $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ donne un espace vectoriel de dimension un dont une base est donnée par $w_3 := (1, 1, 2)$ et qui vérifie donc $f(w_3) = -w_3$;

1.e) On doit vérifier que $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$ entraîne $a = b = c = 0$ (calcul omis), donc $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, w_3\}$ est bien une base de $\mathbf{R}^3$; enfin les formules $f(w_1) = 0$, $f(w_2) = 4w_2$ et $f(w_3) = -w_3$ montrent que :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.f) La matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ se calcule en écrivant en colonne les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans les coordonnées de la base canonique, c'est-à-dire :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le calcul (omis) de l'inverse donne

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 25 & 15 & -20 \\ -1 & 1 & 0 \\ -12 & -8 & 20 \end{pmatrix}$$

1.g) On sait, d'après le cours que $B = P^{-1}AP$; on peut donc vérifier que :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 25 & 15 & -20 \\ -1 & 1 & 0 \\ -12 & -8 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : développements limités (3 points)

2.a) *Donner le D. L. en zéro de la fonction* $\operatorname{arctg} x$ *à l'ordre 5 (on expliquera comment on l'obtient).*

On part de $(1 + u)^{-1} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ d'où l'on tire $(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ d'où, en intégrant terme à terme (ce qui est licite par un théorème du cours) :

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

2.b) *Calculer la dérivée quatrième et cinquième de* $\operatorname{arctg} x$ *en* $x = 0$.

Si l'on pose $f(x) = \operatorname{arctg} x$, la formule de Taylor à l'ordre 5 peut s'écrire :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(0)\frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

L'unicité du développement limité permet de conclure que $f^{(4)}(0) = 0$ et $\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{5}$ d'où $f^{(5)}(0) = 24$.

2.c) *Calculer la limite suivante*

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{x^3}.$$

La formule de Taylor (ordre 3) donne $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{6} + o(1) = -\frac{1}{6}$$

2.d) *On définit la fonction f par $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{x^3}$, si $x \neq 0$ et enfin $f(0) = \ell$ (où ℓ est la limite calculée à la question précédente). Déterminer la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à sa tangente en $x = 0$.*

On fait un calcul similaire au précédent mais à l'ordre 5:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right)x^2 + o(x^2)$$

On voit donc que la tangente est horizontale et, au voisinage de $x = 0$, la courbe est située au dessus de la tangente, car le coefficient $\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}$ est positif.

Exercice 3 : calcul intégral (5 points)

On rappelle que, lorsque $t = \operatorname{tg}(x/2)$, on a les formules $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. On pourra utiliser la valeur $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$.

3.a) *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :*

$$f(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)}.$$

La décomposition a priori s'écrit :

$$f(X) = P(X) + \frac{A}{(X+1)^2} + \frac{B}{(X+1)} + \frac{CX+D}{X^2+1}.$$

Comme le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, on a $P(X) = 0$. Ensuite

$$A = \lfloor (X+1)^2 f(X) \rfloor_{X=-1} = \left\lfloor \frac{X}{X^2+1} \right\rfloor_{X=-1} = -\frac{1}{2}.$$

Puis

$$Ci + D = \lfloor (X^2+1)^2 f(X) \rfloor_{X=i} = \left\lfloor \frac{X}{(X+1)^2} \right\rfloor_{X=i} = \frac{1}{2},$$

d'où $C = 0$ et $D = \frac{1}{2}$. On peut déduire la valeur de B de plusieurs façons, par exemple : $0 = f(0) = A + B + D$ donc $B = 0$ et .

$$f(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{-1/2}{(X+1)^2} + \frac{1/2}{X^2+1}.$$

3.b) *Déterminer une primitive de f.*

On a donc :

$$\int f(x)dx = \frac{1/2}{x+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

3.c) *À l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale:*

$$I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x)} dx.$$

Le changement de variables $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ donne

$$\int \frac{\sin x}{(1+\sin x)} dx = \int \frac{2t}{1+t^2} \frac{1}{1+2t/(1+t^2)} \frac{2dt}{1+t^2} = 4 \int \frac{tdt}{(1+t)^2(1+t^2)}$$

On en tire, en insérant les bornes $t_0 = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = 0$ et $t_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi/2}{2} = 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x)} dx = 4 \int_0^1 \frac{tdt}{(1+t)^2(1+t^2)} = 4 \left\lfloor \frac{1/2}{t+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right\rfloor_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Exercice 4 : équations différentielles (5 points)

Trouver l'ensemble des solutions (réelles) $y(x)$ des équations différentielles suivantes.

4.a) $y' - \cos^2(y) = 0$.

Il s'agit d'une équation à variables éparées; en utilisant $tg'(u) = 1/\cos^2 u$ on déduit de l'équation que $\operatorname{tg} y(x) = x + C$ ou encore $y(x) = \operatorname{arctg}(x + C) + k\pi$.

4.b) $xy' - y = x^2$.

En se plaçant hors de $x = 0$ on peut écrire l'équation $y' - y/x = x$; l'équation homogène $y' - y/x = 0$ a pour solutions $y(x) = Cx$; on peut voir directement que $y_0(x) = x^2$ est solution ou, alternativement la méthode de variation de la constante (chercher une solution de la forme $y_0(x) = C(x)x$) et l'ensemble des solutions est donc décrit par :

$$y(x) = x^2 + Cx.$$

4.c) $y" + 4y = 1 + \sin(x) + \sin(2x)$.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est $X^2 + 4 = 0$ et possède les deux racines $+2i$ et $-2i$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène s'écrit donc $A_1 e^{2ix} + A_2 e^{-2ix}$ ou $C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Une solution particulière de l'équation homogène avec second membre $g(x) = 1$ est donnée par $y_1(x) = 1/4$. Comme $\pm i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, une solution particulière de l'équation homogène avec second membre $g(x) = 1$ est donnée par $y_2(x) = a \sin x$ et le calcul $y_2'' + 4y_2 = a(-1 + 4)\sin x$ donn ele choix $a = 1/3$. Lorsque le second membre est $g(x) = \sin(2x)$, il y a résonance et il faut chercher une solution particulière sous la forme $y_3(x) = x\cos(2x)$, d'où $y_3' = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$ et $y_3'' = -4\sin(2x) - 4x\cos(2x)$ d'où $y_3'' + 4y_3 = -4\sin(2x)$ et le choix de $y_3(x) = -\cos(2x)/4$. on obtient alors, en utilisant le principe de superposition, les solutions de l'équation:

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{4} + \frac{\sin x}{3} - x\frac{\cos(2x)}{4}.$$

Exercice 5 (exercice complémentaire)

Déterminer si la limite suivante existe et, le cas échéant, sa valeur :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n \operatorname{sh}(x)dx.$$

Il est judicieux de faire d'abord une intégration par parties:

$$\int_0^1 nx^n \operatorname{sh}(x)dx = \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{sh} x \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \operatorname{ch}(x)dx.$$

On peut majorer l'intégrale par $\operatorname{ch}(1) \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{\operatorname{ch}(1)}{n+2}$ qui tend vers zéro. Comme $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1, on en déduit:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n \operatorname{sh}(x)dx = \operatorname{sh}(1).$$

Remarque. Il reste vrai que, sous l'hypothèse par exemple que f est continue sur $[0, 1]$ (et surtout en 1), on a encore

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x)dx = f(1),$$

mais c'est plus délicat à montrer.