Examen du 17 déembre 2010, "Courbes et surfaces"

(CS3, option L2 – Université Diderot Paris 7)

Les trois exercices sont indépendants. On suppose implicitement toutes les fonctions suffisamment différentiables (classe $\mathcal{C}^3$ par exemple). Les formules suivantes pourront être utiles dans l'exercice 3 :

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \ \text{ et } \ \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}.$$

Exercice 1 On se place dans le plan de coordonnées canoniques x, y. Comment placer les extrémités d'une ficelle de longueur 6 mètres sur la droite des x et déformer la ficelle de sorte que la surface délimitée par la droite des x et la ficelle ait une aire maximale ? Quelle est la valeur de l'aire maximale obtenue ?

Exercice 2 On définit la courbe paramétrée suivante :

$$M(t) = (t, 1 + \frac{1}{t}, \frac{1}{t} - t)$$

Déterminer les points où la courbe est régulière, birégulière et calculer sa fonction courbure κ, puis sa fonction torsion τ. Comment expliquer la valeur de τ ?

Exercice 3 On définit une surface de révolution par la paramétrisation suivante, où $h(v) > 0$:

$$M(u, v) = (h(v)\cos u, h(v)\sin u, v).$$

On va étudier les propriétés générales de ces surfaces ainsi que quelques cas particuliers.

1. Vérifier que la paramétrisation est régulière et calculer le vecteur normal N.
2. Calculer les coefficients des deux formes fondamentales (dans la base M'_u, M'_v).
3. En déduire la valeur de la courbure de Gauss qu'on notera K et de la courbure moyenne qu'on notera H.
4. Montrer que les seules surfaces de révolution ayant une courbure de Gauss nulle sont des cônes (i.e les surfaces avec $h(v) = av + b$).

5. Montrer que les seules surfaces de révolution ayant une courbure moyenne nulle sont les surfaces telles que h vérifie l'équation différentielle :

$$hh'' - h'^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Lorsque $a > 0$, vérifier que $h(v) = a^{-1} \operatorname{ch} av$ est une solution de (1).

6. Exprimer à l'aide d'une intégrale simple l'aire d'une surface de révolution obtenue pour $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [v_0, v_1]$. Expliciter le résultat lorsque $h(v) = a^{-1} \operatorname{ch} av$.
7. Montrer qu'un méridien ("$u = u_0$") est une géodésique.
8. Soit une courbe horizontale ("$v = v_0$") ; à quelle condition est-ce-une géodésique ?
9. On considère maintenant une courbe $L(u) = M(u, f(u))$; calculer sa courbure normale et géodésique ; écrire une équation différentielle garantissant que c'est une géodésique.
10. Soit $0 \leq u_0 < u_1 < 2\pi$ et $v_0 < v_1$ Expliciter la formule de Gauss-Bonnet (en terme de h, u_0, u_1, v_0, v_1) pour le domaine délimité sur la surface par les quatre arcs suivants : les morceaux de méridiens donnés par $u = u_0$ et $v \in [v_0, v_1]$ puis $u = u_1$ et $v \in [v_0, v_1]$; les morceaux de courbes horizontales donnés par $v = v_0$ et $u \in [u_0, u_1]$ puis $v = v_1$ et $u \in [u_0, u_1]$.