Université Paris Diderot **MI3/MA3 – Année 2009/10**
Département de Sciences Exactes **L2 Info et Mass**

Examen du 4 janvier 2010

Les cinq exercices sont indépendants, le barème est indicatif. Sont autorisés les documents suivants : le polycopié du cours, les notes de cours et de TD. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1. (Séries entières : 4 points) 1.a) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ pour les coefficients suivants

$$n^2 + 2^n; \qquad \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n}(4+k^2).$$

On considère maintenant $a \geq 0$ un entier, on définit la série entière suivante:

$$S_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!(n+a)!}$$

1.b) Déterminer le rayon de convergence de la série définissant $S_a(x)$.
1.c) Monter que S_a est deux fois dérivable et donner une expression sous forme de série entière de $S_a'(x)$ et $S_a''(x)$, en justifiant du rayon de convergence de chacune des séries.
1.d) Vérifier que $S_a(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$xy'' + (2a+1)y' + xy = 0$$

Exercice 2. (Série de fonctions : 4 points) Soit la suite de fonctions $f_n(t) = \frac{t^n \sin(nt)}{n}$.
2.a) Montrer que les séries $S(t) := \sum_{n\geq 1} f_n(t)$ et $T(t) := \sum_{n\geq 1} f_n'(t)$ converge simplement pour $|t| < 1$.
2.b) Montrer que pour tout $0 < a < 1$, la convergence de chacune des séries est normale sur l'intervalle $[-a, a]$.
2.c) Peut-on en déduire que pour tout $t \in]-1, 1[$ on a la relation

$$S'(t) = T(t)?$$

(on justifiera soigneusement la réponse en énonçant les résultat du cours invoqués).
2.d) Donner une expression simple pour $T(t)$.

Exercice 3. (Algèbre linéaire I : 4 points) On se propose d'étudier les suites numériques vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n + 2u_{n-1}$$

Pour cela on introduit la suite de vecteurs du plan $V_n := \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ et la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.a) Montrer que la relation de récurrence se traduit par une relation matricielle

$$V_{n+1} = AV_n.$$

3.b) Diagonaliser la matrice A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec des matrices P et D que l'on déterminera.

3.c) En déduire une expression de A^n et de u_n.

3.d) À quelle condition sur u_0 et u_1, la suite u_n reste-t-elle bornée?

Exercice 4. : 4 points (Algèbre linéaire II) On veut étudier les solutions du système différentiel suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & -2y \\ y' & = & x - z \\ z' & = & 2y \end{array}\right. \qquad (S)$$

4.a) Déterminer une matrice A telle que le système s'écrive sous la forme matricielle : $X' = AX$ avec $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.b) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Est-il possible de choisir ces matrices à coefficients réels ou doit-on les choisir à coefficients complexes?

4.c) Utiliser la question précédente pour calculer les solutions du système (S).

Exercice 5. : 4 points (Algèbre linéaire III) Soit la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

5.a) Calculer le polynôme caractéristique de B et vérifier qu'elle possède une racine triple.

5.b) Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $B = PTP^{-1}$. La matrice B est-elle diagonalisable?

5.c) En déduire le calcul de la matrice $\exp(tB)$.

5.d) Exprimer les solutions du système différentiel suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & 2x - y \\ y' & = & 2x - 2y + z \\ z' & = & 3x - 5y + 3z \end{array}\right. \qquad (E)$$