Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI3/MA3 – Année 2009/10
L2 Info et Mass

Feuille d'exercices n°1 : suites numériques, fonctions continues (révision, approfondissement)

Exercice 1 Rappeler les définitions suivantes :

1. Suite croissante, suite décroissante
2. Suite monotone
3. Suite constante à partir d'un certain rang
4. Suite convergeant vers zéro
5. Suite convergeant vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$
6. Suite convergeant vers $+\infty$, vers $-\infty$

Exercice 2 Que dire des affirmations suivantes ?

1. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée, alors elle converge (*sous-entendu :* vers une limite finie).
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive ou nulle, alors elle convergence vers une limite positive ou nulle.
3. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et strictement positive, alors elle converge vers une limite strictement positive.
4. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites *convergentes*, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite *convergente*.
5. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites *divergentes*, alors $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite *divergente*.

Exercice 3 Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive et tendant vers zéro. Que peut-on dire sur la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans les situations suivantes :

1. $\forall n \geqslant 0, \quad |u_n| \leqslant v_n$
2. $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant v_n$
3. À partir d'un certain rang, on a $|u_n| \leqslant v_n$.

Supposons que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites convergentes, et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite vérifiant $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\geqslant 0}$? Si on rajoute l'hypothèse $\lim v_n = \lim w_n$, que peut-on dire maintenant ?

Exercice 4 [suites de nombres complexes] Rappeler la définition d'être convergente, pour une suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs complexes. Si $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, montrer que : $(z_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ convergent. En cas de convergence, si on pose $z = \lim z_n$, $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$, alors on a $z = x + iy$.

Exercice 5 Déterminer, en la justifiant, la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes où l'on note $\mathbf{u} = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique :

a) si $\mathbf{u}$ converge, $\mathbf{u}$ est monotone ;

b) si $\mathbf{u}$ est monotone, $\mathbf{u}$ converge ;

c) si $\mathbf{u}$ est monotone et bornée, $\mathbf{u}$ converge ;

d) si $\mathbf{u}$ est décroissante et positive, $\mathbf{u}$ converge ;

e) si $\mathbf{u}$ converge, $\mathbf{u}$ est bornée ;

f) si $\mathbf{u}$ ne converge pas, $\mathbf{u}$ n'est pas bornée ;

g) si $\mathbf{u}$ converge, $\mathbf{u}$ garde un signe constant à partir d'un certain rang ;

h) si $\mathbf{u}$ est non majorée, $\mathbf{u}$ tend vers $+\infty$;

i) si $\mathbf{u}$ est croissante et non majorée, $\mathbf{u}$ tend vers $+\infty$;

j) si $\mathbf{u}$ tend vers $+\infty$, $\mathbf{u}$ garde un signe constant à partir d'un certain rang ;

k) si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne convergent pas, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ne converge pas ;

l) si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ne converge pas ;

m) si $\mathbf{u}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $\mathbf{v}$ converge, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;

n) si $\mathbf{u}$ converge et $\mathbf{v}$ ne converge pas, $\mathbf{uv}$ ne converge pas ;

o) si $\mathbf{u}$ converge et $\mathbf{v}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), $\mathbf{uv}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$;

p) si $\mathbf{u}$ converge vers 0, $\mathbf{uv}$ converge vers 0.

Exercice 6 [suites géométriques] Rappeler la définition d'une suite géométrique de raison r. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une telle suite, et soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite dont le terme général S_n est la sommation des n premiers termes de la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$, soit :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k\,, \quad n \geqslant 0.$$

Rappeler la formule exprimant S_n en fonction de u_0, r et n. À quelle condition sur la raison r les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(S_n)_{n\geqslant 1}$ sont-elles convergentes ?

Exercice 7 [suites de Cauchy ; transformation d'Abel] Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites, on pose $A_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$; démontrer l'identité suivante dite transformation d'Abel :

$$S_n := \sum_{m=1}^{n} a_m b_m = \sum_{m=1}^{n} A_m(b_m - b_{m+1}) + A_n b_{n+1}.$$

Rappeler la définition d'une suite de Cauchy et la relation entre suites convergentes et suites de Cauchy.

Supposons maintenant que la suite A_n est bornée et la suite b_n décroissante et convergente vers zéro. Montrer que S_n est une suite de Cauchy et en déduire qu'elle est convergente.

Application n^0 1 : Montrer que la suite de terme général $(u_n)_{n\geqslant 0}$ défini par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

est une suite convergente. Montrer aussi que la suite de terme général $(v_n)_{n\geqslant 0}$ défini par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

est une suite divergente. *Indication :* étudier $v_{2^{n+1}} - v_{2^n}$; montrer que $|v_{2^{n+1}} - v_{2^n}| \geqslant \frac{1}{2}$ et conclure grâce à la partie facile du critère de Cauchy.

Application n^0 2 : Montrer que la suite de terme général $(u_n)_{n\geqslant 1}$ défini par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k^\alpha}$$

est une suite convergente, lorsque $\alpha > 0$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. [Indication : on pourra montrer que, lorsque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sum_{m=0}^{n} \cos(m\theta) = \frac{\cos(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ est borné.]

Exercice 8 [le nombre e] On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot n!}\,.$$

Montrer que :

1. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante ;
2. la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante ;
3. pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$;

4. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

En déduire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes et de même limite. Cette limite est le nombre réel e.

Compléments.

1. On se propose de montrer que $e \notin \mathbb{Q}$. Pour cela montrer qu'on peut écrire $u_n = \frac{a_n}{n!}$ avec a_n entier et en déduire l'inégalité, valable pour tout $n \geqslant 1$:
$$a_n < e\,n! < a_n + \frac{1}{n}.$$
Supposer que $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et en déduire une contradiction en choisissant $n = q$ dans l'inégalité précédente.
2. Montrer qu'on a également $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. [Indication : l'exercice est plus facile si l'on suppose connue la fonction logarithme.]

Exercice 9 [moyenne de Césaro] Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels, et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des *moyennes de Césaro*, définie par :
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\,, \quad n \geqslant 1.$$

1. Montrer que si $\lim u_n = 0$, alors $\lim v_n = 0$.
2. En déduire que si $\lim u_n = l$, alors $\lim v_n = l$.
3. Application : Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$une suite dont les termes sont tous strictement positifs. On suppose que la suite de terme général $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ est convergente, de limite $l > 0$. Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $z_n = \sqrt[n]{x_n}$ est convergente, de limite l.
4. Donner un exemple de suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\lim \sqrt[n]{x_n} = l$ mais la limite de $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ n'existe pas.
5. *Application.* Déterminer la limite de la suite de terme général : $\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 10 [comparaison somme-intégrale] Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, décroissante et continue. On pose
$$n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx.$$

1. Faire un schéma représentant le graphe de f, et y situer la valeur de u_n en terme d'aire.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée, donc convergente.
3. Appliquer la méthode de comparaison à une fonction bien choisie pour montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général défini par
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,,$$
est une suite divergente. [On pourra comparer avec la preuve de la divergence donnée dans l'exercice 7.]
4. Prouver les encadrements :
$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$
En déduire la limite de la suite de terme général :
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 11 On définit la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$.

a) Montrer que $f_n(x)$ est une fonction continue et strictement croissante (c'est-à-dire que $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$; en déduire qu'il existe un unique nombre réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. [Indication : pour l'existence, on utilisera le théorème des valeurs intermédiaires.]

b) Montrer que pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $f_n(x)$ est décroissante, c'est-à-dire $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. En déduire que x_n est croissante et convergente (on appellera ℓ la limite).

c) Vérifier que $f_n(3/4) > 0$ donc $x_n < 3/4$ et donc $\lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$. Conclure que $\ell^2 + \ell - 1 = 0$ et ainsi que ℓ est égal à : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 12 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. On se propose de montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire un lment $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Posons $g(x) = f(x) - x$. Montrer que g est continue, que $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$ et conclure qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$ ou encore $f(x_0) = x_0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 13 a) Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des réels deux à deux distincts ; combien de zéros possède la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}?$$

Indication : on étudiera le sens de variation, la continuité sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.