Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI2 – Année 2010/11
L2 Info

Feuille d'exercices n°1 : Algèbre linéaire (révision, approfondissement)

Exercice 1 Trouver des bases des espaces vectoriels des solutions des systèmes d'équations linéaires

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (formules de Cramer en dimension 2) On étudie le système d'inconnues x, y et de paramètres a, b, c, d, u, v

$$\begin{cases} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{cases}$$

Posons $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$. Montrer que, si ce dernier est non nul, il y a une unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Que se passe-t-il si $ad - bc = 0$?

Exercice 3 Trouver la dimension, des bases et des équations pour les espaces vectoriels $E \cap F$ et $E + F$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, avec $E := \langle (1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 3, 3) \rangle$ et $F := \langle (1, 2, 2), (2, 3, -1), (1, 3, -3) \rangle$.
2. Dans $\mathbb{R}^5$, avec $E := \langle (-1, 6, 4, 7, -2), (2, 3, 0, 5, -2), (-3, 6, 5, 6, -5) \rangle$ et $F := \langle (1, 1, 2, 1, -1), (0, -2, 0, -1, -5), (2, 0, 2, 1, -3) \rangle$.

Exercice 4 On note E_d l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant d$.

1. Donner une base de E_d et en déduire sa dimension.
2. Soient $P_0, \ldots, P_d$ des polynômes tels que $\deg(P_i) = i$. Montrer qu'ils forment une base de E_d . [Indication : on pourra montrer qu'ils sont linéairement indépendants.]
3. Soit F l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant d$ et s'annulant en 0 et 1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E_d et calculer sa dimension.

Exercice 5 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels deux à deux disjoints. Montrer que les fonctions

$$x \mapsto e^{a_1 x}, \ldots, x \mapsto e^{a_n x}$$

sont linéairement indépendantes.

Exercice 6 Soit E l'ensemble des suites réelles $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant le fait qu'une suite $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ dans E est entièrement déterminée par u_0 et u_1, montrer que $\dim E \leqslant 2$.
3. Déterminer les suites de la forme $u_n = a^n$ qui appartiennent à E.
4. Donner une expression de la suite $\{u_n\}_{n \geqslant 0}$ dans E telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

Exercice 7 Soient U, V, W des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $\dim U + \dim V > \dim E$ alors $U \cap V \neq \{0\}$
2. A-t-on toujours $U \cap (V + W) = U \cap V + U \cap W$?
3. Montrez que
$$(U + W) \cap (V + W) \cap (V + U) = (W + V) \cap U + (V + U) \cap W.$$

Exercice 8 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y, z) \end{array}$$

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2$ celle de $\mathbb{R}^2$; on définit $\mathcal{B}_3 := \{(1, 2), (-1, 1)\}$ et $\mathcal{B}_4 := \{(1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0)\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(b) Déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_3$, de $\mathcal{B}_3$ vers $\mathcal{B}_1$, de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_4$ et de $\mathcal{B}_4$ vers $\mathcal{B}_2$.

(c) Déterminer la matrice de f dans les bases de $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

(d) Déterminer la matrice de f dans les bases de $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$.

Exercice 9 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la dimension et une base du noyau et faire de même pour l'image de f
2. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe du noyau et de l'image.
3. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathrm{Im}(f)$, comment s'écrit la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$?

Exercice 10 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \to E$ une application linéaire. On dit que p est un *projecteur* si $p \circ p = p$. Soit donc p un projecteur.

1. Calculer $(Id_E - p) \circ (Id_E - p)$ et en déduire que $Id - p$ est également un projecteur.
2. Calculer $p \circ (Id_E - p)$ et $(Id_E - p) \circ p$ et en déduire que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}(Id_E - p)$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$.
4. Expliciter les restrictions de p à $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$.
5. Soit $x = u + v$ la décomposition d'un vecteur $x \in E$ avec $u \in \mathrm{Ker}\, p$ et $v \in \mathrm{Im}\, p$. Exprimer u, v, $p(u)$ et $p(v)$ en fonction de v.
6. On suppose que $E = F \oplus G$ et on écrit $x = u + v$ la décomposition d'un vecteur $x \in E$ avec $u \in F$ et $v \in G$; définissons $p : E \to E$ par $p(x) = u$. Montrer que p est un projecteur − on dit que p est la projection sur F parallèlement à G.
7. Soit $E = \mathbb{R}^3$, F le plan d'équation $x + y + z = 0$ et G la droite d'équations $x = y = z$. Vérifier que $F = \langle (1, 0, -1), (1, -1, 0) \rangle$ et $G = \langle (1, 1, 1) \rangle$ et que $E = F \oplus G$.
8. Calculer les coordonnées (x', y', z') de $p(x, y, z)$ où p est la projection sur F parallèlement à G (et F et G sont comme dans l'exemple précédent).

Exercice 12 On note M_n l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On note S_n le sous-ensemble des matrices symétriques, i.e. telles que ${}^tA = A$; on note A_n le sous-ensemble des matrices anti-symétriques, i.e. telles que ${}^tA = -A$ et enfin on note T_n le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures i.e. telles que $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

1. Vérifier que S_n, A_n et T_n sont des sous-espaces vectoriels de M_n.
2. Calculer les dimensions de M_n, S_n, A_n et T_n.
3. Calculer la dimension de la somme et de l'intersection de deux de ces sous-espaces.