Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI3/MA3 – Année 2009/10
L2 Info et Mass

Feuille d'exercices n°2 : séries numériques à termes positifs

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K}$ désigne le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes, i.e. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Exercice 1 Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique. On définit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ de ses différences successives, i.e. $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} v_n$ pour tout entier $N \in \mathbf{N}$.

b) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} v_n$ converge ssi la suite $\mathbf{u}$ converge. Dans ce cas, exprimer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

c) On suppose que la suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbf{N},n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir du rang $n_0 \in \mathbf{N}$. La suite $\mathbf{v}$ de ses différences successives n'est donc définie aussi qu'à partir du rang n_0.
Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{N},n\geqslant n_0} v_n$ converge ssi $\mathbf{u}$ converge. Dans ce cas, exprimer la valeur de $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

d) Montrer que, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, il existe une suite $\mathbf{u} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$. Une telle suite $\mathbf{u}$ est-elle unique ?

e) Pour chacune des séries $\sum_{n\in\mathbf{N},n\geqslant n_0} v_n$ suivantes, trouver $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbf{N},n\geqslant n_0} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telle que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$ et déterminer la nature et la somme éventuelle de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3-n}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \sin\frac{\pi}{4n^2-1}\,\sin\frac{2n\pi}{4n^2-1} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+1}\left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{\ln n}{n}\right) \qquad \sum_{n\geqslant 1} \arctan\frac{1}{1+n+n^2}.$$

Exercice 2 *Moyennes de Cesaró.* Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite numérique réelle.

1. On définit la suite $\mathbf{v} = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des moyennes de Cesaró de $\mathbf{u}$ par : $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k$ si $n \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que, si $\mathbf{u}$ est monotone, $\mathbf{v}$ l'est aussi.

b) Montrer que, si $\mathbf{u}$ tend vers $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\mathbf{v}$ aussi.

c) Trouver une suite $\mathbf{u}$ qui n'a pas de limite mais telle que $\mathbf{v}$ converge.

d) Montrer que, si $\mathbf{u}$ est monotone et $\mathbf{v}$ converge vers $l \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u}$ converge vers l.

2. On fixe une suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs telle que $A_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k$ tend vers $+\infty$. On peut alors associer à $\mathbf{u}$ la suite $\mathbf{v} = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de ses moyennes barycentriques (selon $\mathbf{a}$) définie par :

$$v_n = \frac{1}{A_n}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k u_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Les moyennes de Cesaró sont ainsi obtenues dans le cas particulier où $\mathbf{a}$ est la suite constante égale à 1.
Vérifier que les assertions vues en ***1*** sont encore valides dans ce cas plus général.

3. On suppose que $\mathbf{u}$ à termes strictement positifs converge vers $l \in \mathbf{R}_+$.
Montrer que la suite de terme général $(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} u_k)^{1/n}$ (resp. $(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} u_k^k)^{1/n^2}$) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 *Séries de Riemann et séries de Bertrand.*
Soit φ une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $\sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)} = C \in \mathbf{R}_+^*$.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante strictement positive.
Montrer que les séries de terme général u_n et $v_n := (\varphi(n+1)-\varphi(n))u_{\varphi(n)}$ sont de même nature. [Indication : en notant $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_1 + \cdots + v_n$, on pourra comparer $S_{\varphi(n)}$ et T_n.]

b) En utilisant $\varphi(n) = 2^n$, prouver que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$, converge ssi $\alpha > 1$. De même, la série de Bertrand de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, converge ssi $(\alpha,\beta) \in]1,+\infty[\times\mathbf{R}\cup\{1\}\times]1,+\infty[$.

Exercice 4 *Exemples variés de séries.* Déterminer la nature des séries à termes positifs suivantes :

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{2^n+5}{3^n-11}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{\ln a}\ (a>0)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2\sin(2^{-n})$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\sqrt{\frac{\ln n}{1+\ln n}}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n+\ln n}{n^2+1}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^3\ln n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^2}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{1+\frac{1}{n}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(\frac{3n}{4n-1}\Big)^{2n+1}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-\sqrt{n}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\sqrt{\frac{1}{1+\ln n}}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n!\Big(\frac{x}{n}\Big)^n\ (x>0)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n}{1+b^n}\ (a>0,b>0)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 1-\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(n^6+3)^a-(n^2+2)^{3a}\ (a\in\mathbf{R})$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^n\cosh(n)\ (a>0)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n+2^{\sqrt{n}}}\ (a>0,b>0)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\prod_{2\leq k\leq n}(2-\sqrt[k]{\mathrm{e}})$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\sum_{2\leq k<n} k!$

Exercice 5 *Un équivalent de la série Harmonique*
On étudie ici le comportement asymptotique de la série Harmonique $\mathbf{H}$ définie par $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, pour $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Montrer que la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0 en $+\infty$. Calculer une primitive de f. En déduire l'existence et la valeur de $\int_n^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n\geqslant 1$.

b) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ est *à termes positifs*, puis, en la comparant à l'intégrale $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$, qu'elle converge. Sa somme notée γ est la célèbre constante d'Euler : ($\gamma=0,5772\ldots$).

Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on note R_n le reste de rang n de la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$: $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$.

c) Vérifier que $R_n\leqslant\int_n^{+\infty}f(x)\,dx$ et prouver que : $R_n=O\big(\frac{1}{n}\big)$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$.

d) Remarquant que, pour tout $n\geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(n+1)$, prouver que : $\mathrm{H}_n=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 6 *Liens entre séries et intégrales indéfinies*

Soit f une fonction positive et intégrable sur $[a,+\infty[$ ($a\in\mathbf{R}_+^*$). Si f est monotone, la série $\sum_{n\in\mathbf{N},n>a}f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Plus généralement, si $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de limite $+\infty$ prenant ses valeurs dans $[a,+\infty[$, la série de terme général $\int_{c_n}^{c_{n+1}}f(t)\,\mathrm{d}t$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

a) Soit f positive, continue et croissante sur $]0,1[$. Prouver que les séries de terme général $f\big(\exp(-n)\big)$ et $\frac{1}{n}f\big(\frac{1}{n}\big)$ sont de même nature. Pour $f(x)=|\ln(x)|^{\alpha}$ et $\alpha\in\mathbf{R}$, retrouver un résultat sur les séries de Bertrand.

b) Nature des séries de terme général $u_n=n^{-\beta}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k^{\alpha}$ et $v_n=n^{-\beta}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k^{\alpha}\ln k$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 7 *Quelques intégrales indéfinies*

1. Déterminer pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}$ l'intégrale $\Gamma(a):=\int_0^{\infty}e^t t^{a-1}dt$ est convergente. Montrer que $a\Gamma(a)=\Gamma(a+1)$ et en déduire la formule $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Pour quelles valeurs de $a,b\in\mathbb{R}$ l'intégrale $\int_2^{\infty}\frac{dt}{t^a(\log t)^b}$ est-elle convergente (comparer avec l'exercice sur les séries de Bertrand).
3. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in(\mathbf{R}_+^*)^2\times\mathbf{R}$. étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty}|\sin(t)|t^{-\gamma}\,\mathrm{d}t,\qquad\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^{\alpha}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^{\alpha}|\sin t|)^{\beta}}\,\mathrm{d}t$$