Feuille d'exercices n°3 : séries numériques et séries de fonctions

Exercice 1 *Quizz.* Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Déterminer la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes en justifiant votre réponse, c'est-à-dire en donnant soit une preuve soit un contrexemple.

a) Si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$ et si $\mathbf{u}$ est décroissante et a pour limite 0, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge.

b) Si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge, alors la suite $\mathbf{u}$ est décroissante partir d'un certain rang.

c) Si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} \sqrt{u_n}$ converge.

d) Si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$ et si $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n^2$ converge.

e) Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n u_n) = 1$ alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge.

f) Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge.

Exercice 2 *Une série-produit converge-t-elle toujours ?*

On considère les séries de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ avec $\sum_{n\in\mathbf{N}} v_n$, c'est-à-dire la série de terme général $c_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, est divergent. Montrer cependant que le produit de Cauchy de $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ par elle-même est convergent. Commenter.

Exercice 3 *Le critère des séries alternées ne fait pas des miracles !*

1. On s'intéresse à la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$$

a) Peut-on utiliser le critère des séries alternées pour montrer que cette série converge ?

b) Montrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$. Peut-on en déduire que cette série converge ?

c) Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. En déduire celle de la série ci-dessus.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot$.

a) Montrer que la série de terme général v_n est divergente.

b) La série de terme général u_n est-elle convergente ?

3. Déterminer la nature des séries de terme général

$$\sin\Big(n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\Big), \quad \exp\Big(\frac{1}{n}\Big) - 1 - \frac{c}{n} \text{ où } c \in \mathbf{R}, \quad (-1)^n\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\Big).$$

4. Soit f une fonction numérique réelle définie et de classe C^2 sur $]-1,+1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = f''(0) = 1$.

Déterminer la nature de la série de terme général $f(u_n)$ lorsque u_n vaut $\frac{1}{n}$ (resp. $\frac{1}{n^2}$, $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$).

Exercice 4 *Testez-vous !* Indiquer pour chacune des séries suivantes s'il s'agit d'une série absolument convergente, si l'on peut lui appliquer le critère des séries alternées et si elle est convergente :

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n(n+1)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n+1}{n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\sin(n\theta)$ $(\theta \in \mathbf{R})$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-\cos(n\pi)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n-\cos(n\pi)}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n}-3n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cosh\Big(\frac{1}{n}\Big)\sin\Big(\frac{1}{n}\Big)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\Big(n\cosh\Big(\frac{1}{n}\Big)\sin\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \Big(\frac{1+n(1-2i)}{n(3-2i)-3i}\Big)^n$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n^2}\cdot$

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On désignera par S sa somme.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}\cdot$

1. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
2. Démontrer que la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$, quel que soit $a>0$.
3. Calculer $S(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. La fonction S est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 Pour tout $n\geqslant 1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}\cdot$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle convergente en 0 ? Pour $x>0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. On fixe un réel strictement positif ε. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h(x) = 1/x$.
   – Montrer que la fonction h est bornée sur $[\varepsilon,+\infty[$.
   – Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[\varepsilon,+\infty[$.
   – Montrer que la fonction f est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$.
3. Peut-on déduire de la question précédente les assertions suivantes ? Justifier votre réponse.
   – La fonction h est bornée sur $]0,+\infty[$.
   – la série de fonction $\sum f_n$ est normalement convergente sur $]0,+\infty[$.
   – La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 8 On pose pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}\cdot$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer pour tout $x\geqslant 0$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\,dt}{x^2+t^2} \;\leqslant\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2} \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} \frac{x\,dt}{x^2+t^2}\cdot$$

   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Comparer cette limite à : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}\cdot$

Exercice 9 Pour tout $n\geqslant 1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan\Big(\dfrac{x}{n}\Big)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. La série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$?
3. Soit a un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a,a]$.

4. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 10 En considérant la série de fontions $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ ·

Exercice 11 On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\frac{x}{2^n}$ ·

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)$ est un réel bien défini, mais que cette série de fonctions n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t).$$

1. Étude de la série de fonctions $\sum f_n$.
   - Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
     On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
   - Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - Calculer $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
2. Étude de la série de fonctions $\sum F_n$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $F_n(x)$.
   - Montrer que la série de fonctions $\sum F_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
     On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   - Exprimer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ sous forme d'une somme de série.
3. Montrer que $F(x) = \int_0^x f(t)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
4. En déduire l'identité $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t - 1} dt \;=\; 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ·

Exercice 13 On reprend les fonctions $f_n(x)$ et f de l'exercice 7, définies sur $\mathbb{R}_+$. Bien que la série de fonctions $\sum f_n$ ne soit pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$, on souhaite calculer la limite de f en 0. Pour ce faire, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,\, x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que f est positive et décroissante.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $S_n(x) \leqslant f(x)$.
3. Montrer qu'on a $S_n(\frac{1}{n}) \geqslant \frac{1}{2} H_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Quelle est la limite de la suite (H_n) ? En déduire que $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$.
5. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, en utilisant les questions 1 et 4.

Exercice 14 Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$·

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum f_n(x)$ est convergente. Soit alors $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que f est une fonction paire et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n' est normalement convergente sur $[-a, a]$. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que
$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{n+1},$$
pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.