

Feuille d'exercices n°3 :

Calculs de limites, développements limités et applications

On rappelle que \log ou \ln désigne (en mathématiques) le logarithme neperien .

Exercice 1 Soit $f(x) = \text{Arctg } x^2$. Calculer $f^{(n)}(0)$.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x^3}{x^4 - x^5}$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$;
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$;
6. $\lim_{x \rightarrow +2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 4}$;
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - a\sqrt{1+x}}{x^3}$, où $a \in \mathbb{R}$;
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)^3}{x \sin^2 x}$;
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}$.

Exercice 3 Soit a un paramètre réel. Etudier la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + a} - x)$.

Exercice 4 Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ a-t-on la formule :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + 1} \right) = 0?$$

Exercice 5 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x^2} - 1}{\log \cos x}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \log \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$.

Exercice 6 Trouver un développement limité (D. L.) au voisinage de zéro à l'ordre précisé pour chacune des fonctions suivantes :

1. $\text{tg}^2 x$ à l'ordre 7 ;
2. $\frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 7 ;
3. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 7 ;
4. $\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2$ à l'ordre 7 ;

5. $\frac{\log(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4;
6. $\exp \cos x$ à l'ordre 7;
7. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 7;
8. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 7;
9. $\operatorname{Arctg} x^2$ à l'ordre 5;
10. $\log(1+x \cos x)$ à l'ordre 5.

Exercice 7 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{1 - \sqrt{x - \log(1+x)}}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x(1 - \cos 3x)}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 8 On considère la fonction $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 4}$. Montrer que la fonction admet une asymptote lorsque x tend vers $\pm\infty$, déterminer ces deux asymptotes ainsi que la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à ces asymptotes.

Exercice 9 On définit, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f(x) = \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est dérivable et vérifier que $f'(x) = 0$.
2. En déduire la formule

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction $\operatorname{Arctg} x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. La limite est-elle atteinte par valeurs positives ou négatives?

Exercice 10 Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a(x) = x^a \log x$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'il existe deux suites u_n et v_n telles que

$$f_a^{(n)}(x) = x^{a-n}(u_n \log x + v_n).$$

2. Montrer que les suites vérifient $u_{n+1} = (a-n)u_n$ et $v_{n+1} = (a-n)v_n + u_n$.
3. En déduire une expression en termes de n pour u_n et que v_n , vue comme fonction de a , vérifie $v_n = u_n'$.
4. Écrire le développement limité à l'ordre n de $f_a(x)$ au voisinage de $x = 1$.