Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MA3 – Année 2010/11
L2 Mass

Feuille d'exercices n°4 : Séries entières

Exercice 1 Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque la suite a_n est donnée successivement par :

$$n^n, \qquad \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}, \qquad \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \frac{1}{n\pi^n}, \qquad \ln n, \qquad \frac{n^n}{n!}, \qquad \frac{1}{2^{3n-2}}, \qquad \frac{3n^2-n-1}{n^2+5n+1}.$$

Exercice 2 Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{8^n}, \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{8^n}, \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{n^3}}{8^n}.$$

Exercice 3 Soit a_n la n-ième décimale du développement décimal du nombre e. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ est définie et continue sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. On définit $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ par
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad , \quad g(0) = 1\,.$$
Montrer que g est une fonction continue sur $]-1,1[$ et que g est sur cet intervalle la somme d'une série entière.
3. Soit h la primitive de g qui s'annule en 0. "Calculer" h (c'est-à-dire l'exprimer comme une fonction usuelle).
4. Calculer $f(x)$, pour tout $x \in]-1,1[$.

Exercice 5 Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières dont le terme général est donné ci-dessous et, en utilisant les mêmes idées que dans l'exercice précédent, calculer sa somme.

$$n^2x^n, \qquad \frac{n^2+1}{n!}x^n, \qquad \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\,.$$

Exercice 6 Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n}x^{2n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}, \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\alpha)}{n!}x^n\,.$$

Exercice 7 On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

1. Effectuer la décomposition de f en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière en 0. Calculer ce développement, ainsi que son rayon de convergence.

Exercice 8 Donner le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \qquad e^x\cos x, \qquad (\cos x)^3, \qquad \frac{1}{(1+x^2)(1-x)}, \qquad \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t}\,dt, \qquad \frac{1+x}{(1-x)^3} \qquad e^{x^2-2x}\,.$$

Exercice 9 Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

1. Montrer que f est développable en série entière en 0. Que peut-on dire du rayon de convergence R de ce développement ?
2. Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]-1,1[$, d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de f et la valeur de R.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$ est développable en série entière en 0. Calculer ce développement, ainsi que son rayon de convergence.

Exercice 10 On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \cosh \sqrt{x} \quad \text{si } x \geqslant 0\,, \qquad f(x) = \cos \sqrt{-x} \quad \text{si } x < 0\,.$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant les développements en séries entières des fonctions cosinus et cosinus hyperbolique, montrer que f est développable en série entière en 0. Quel est le rayon de convergence de ce développement ?
3. Montrer que f est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $f^{(k)}(0)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Développer en série entière :
- la fonction $\ln x$, au point $a > 0$,
- la fonction e^{x^2-2x} au point 1,
- la fonction $\cos x$ au point $\pi/3$,

sans oublier de préciser le rayon de convergence de chacune des séries obtenues.

Exercice 12 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle convergeant vers a.
1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$. On désignera par $f(x)$ la somme de cette série, en tout x où elle est convergente.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x)$.

Exercice 13 Pour tout $x \neq 1$, posons $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x} \cdot$
1. Montrer que f est développable en série entière au point 0.
   On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ce développement et R son rayon de convergence.
2. En effectuant un produit de séries, montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Calculer R.

Exercice 14 Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il une fonction f, non nulle, développable en série entière au point 0, telle que $f'(x) = f(ax)$, pour tout x voisin de 0 ? Calculer cette série entière, quand elle existe, et donner son rayon de convergence.

Exercice 15 On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0\,. \tag{1}$$

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, la somme d'une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que f est solution de (1) si et seulement si on a

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}\, a_n\,, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction f solution de (1) telle que
   - f est développable en série entière au point 0,
   - $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

   Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.