Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MA3 – Année 2010/11
L2 Mass

# Feuille d'exercices n°5 : Révisions d'algèbre linéaire, déterminants

*Révisions d'algèbre linéaire (bases, dimension, changement de bases)*

**Exercice 1** Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. On pose

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $f_1, f_2, f_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $P$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $f_1, f_2, f_3$ ainsi que son inverse $P^{-1}$.
3. En utilisant la formule de changement de base, calculer $A'$ la matrice de $u$ dans la base $f_1, f_2, f_3$.
4. Calculer directement $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$ et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

**Exercice 2** On introduit les vecteurs dans $E = \mathbb{R}^5$ et la matrice suivantes :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ f_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On désignera par $u : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A$.

1. Soit $F$ (resp. $G$) le sous-espace de $E$ engendré par $f_1, f_2$ (resp. $f_3, f_4$). Vérifier que $F$ et $G$ sont en somme directe.
2. Montrer que $f_5$ n'appartient pas à $F + G$ ; en déduire que si l'on note $H$ la droite engendrée par $f_5$, alors $E = F \oplus G \oplus H$.
3. Montrer que les sous-espaces $F$, $G$ et $H$ sont stables par l'application $u$ (i.e. $\forall x \in F$, $u(x) \in F$ etc.).
4. Écrire $P$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ et calculer son inverse $P^{-1}$.
5. En utilisant la formule de changement de base, calculer $A'$ la matrice de $u$ dans la base $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$.
6. Comment lit-on sur la matrice $A'$ le fait que $F$, $G$ et $H$ sont stables ?

**Exercice 3** Soit $E$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant 2$, $F$ le sous-ensemble des applications affines et $G$ celui des polynômes $P$ tels que $P(1) = 3$. On considère aussi les applications

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ P & \mapsto & P' \end{array}, \qquad g : \begin{array}{rcl} F & \to & E \\ P(x) & \mapsto & (x+1)\,P(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{rcl} F & \to & E \\ P & \mapsto & P^2. \end{array}$$

1. Vérifier que $E$, doté de la multiplication par un réel et de l'addition usuelles des polynômes, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. $F$ et $G$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ?
3. $f, g$ et $h$ sont-elles des applications linéaires ?
4. On appelle $\mathcal{C}_E := \left(1, x, x^2\right)$ la *base canonique* de $E$. Vérifier que $\mathcal{B}_E = \left(1, x+1, \frac{(x+1)^2}{2}\right)$ est également une base de $E$.
5. À partir de vecteurs de $\mathcal{B}_E$ (respectivement de $\mathcal{C}_E$), constituer une base $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{C}_F$) de $F$.
6. Quelle est la dimension de l'espace $E$ ? de $F$ ?
7. Écrire dans les bases $\mathcal{C}_E$, $\mathcal{C}_F$ la matrice $A$ de $f$ et la matrice $B$ de $g$.
8. Calculer $(f \circ g)(1)$ et $(f \circ g)(x)$. En déduire la matrice $C$ de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{C}_F$.
9. Vérifier par le calcul que l'on a bien $AB = C$.

10. Écrire dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ la matrice $A'$ de $f$, la matrice $B'$ de $g$ et la matrice $C'$ de $f \circ g$.
11. Quelles applications — et dans quelles bases — représentent les matrices $BA$, $B'A'$ et $C^2$ ?
12. Écrire la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{C}_F$ à la base $\mathcal{B}_F$. En déduire la matrice $D$ de $f$ dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{C}_F$.
13. Écrire la matrice de passage $Q$ de la base $\mathcal{C}_E$ à la base $\mathcal{B}_E$. Justifier la relation $D = AQ$.
14. Justifier la relation $C = PC'P^{-1}$.

**Exercice 4** On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 5y' + 6y = 0\,, \qquad\qquad (D)$$

le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et les endomorphismes $f, g$ de $E$ définis par : $f(y) = y' - 2y,\ g(y) = -y' + 3y$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ est l'ensemble des solutions réelles de l'équation $(D)$.
2. Montrer que $g \circ f = f \circ g$. En déduire que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ puis, à l'aide de la relation $f(y) + g(y) = y$ : $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$, une base de $\mathrm{Ker}\, g$, puis l'ensemble des solutions réelles de $(D)$.

*Déterminants : calcul, applications*

**Exercice 5** (Aires et volumes)

1. Dessiner le parallélogramme engendré dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les deux vecteurs $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 3)$ ; calculer l'aire de ce parallélogramme.
2. Dessiner le parallélépipède engendré dans l'espace $\mathbb{R}^3$ par les trois vecteurs $f_1 = (2, 0, 2)$, $f_2 = (1, 2, 3)$ et $f_3 = (1, 4, -1)$ ; calculer le volume de ce parallélépipède.

**Exercice 6** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -20 & 20 & -30 \\ 50 & 10 & 40 \\ 30 & -40 & 50 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3+2i & -7+3i \\ -2+5i & 4-i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+i & 2-i & 2 \\ i & 1+2i & 1+i \\ 2+i & 3+i & 3-i \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -7 & -9 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -7 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 7** Calculer les déterminants suivants en factorisant le résultat autant que possible et *aussitôt que possible* durant le calcul :

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & x & -4 \\ -x & y & 2x \\ x & 2y & -y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 8** On considère les applications $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (resp. $v : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$) définies par la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{C}^2$).

1. Interpréter géométriquement l'application $u$ et montrer qu'il n'existe aucun vecteur propre.
2. Calculer le polynôme caractéristique de $v$, ses valeurs propres et vecteurs propres (dans $\mathbb{C}$ bien sûr).
3. En déduire un changement de base qui diagonalise la matrice.

**Exercice 9** Montrer qu'un système d'équations $AX = B$, où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients complexes et $B$ un vecteur colonne de $\mathbb{C}^n$, possède une unique solution $X$ si et seulement si $\det A \neq 0$.
*Application.* Déterminer, selon les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions du système :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & y & - & 5z & = & -4 \\ 2x & + & y & + & z & = & 5 \\ 4x & + & 3y & + & \alpha z & = & 9\,. \end{array}\right.$$

**Exercice 10** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\det(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de $n$ vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et $x.y$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ : $x.y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Enfin, pour tous vecteurs $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} u_1.v_1 & u_1.v_2 & \cdots & u_1.v_n \\ u_2.v_1 & u_2.v_2 & \cdots & u_2.v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_n.v_1 & u_n.v_2 & \cdots & u_n.v_n \end{vmatrix}.$$

1. Soit $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \Delta(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n)$ est une forme $n$-linéaire alternée. En déduire pour tous $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ : $\Delta(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n) = \Delta(u_1, \ldots, u_n; e_1, \ldots, e_n) \,.\, \det(v_1, \ldots, v_n)$.
2. À l'aide de la question précédente, montrer pour tous $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ :

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n) = \det(u_1, \ldots, u_n) \,.\, \det(v_1, \ldots, v_n).$$

**Exercice 11** On se propose de calculer le déterminant — dit de *Van der Monde* —

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour cela on fixe $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et on pose $P(x) = D_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$. Montrer que $P$ est un polynôme de degré $n-1$ qui s'annule en $x_1, \ldots, x_{n-1}$ lorsque ces derniers nombres sont distincts. En déduire une expression de $D_n(x_1, \ldots, x_n)$ à l'aide de $D_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et conclure.

**Exercice 12** Soit $A$ une matrice inversible $n \times n$ et $P$ son polynôme caractéristique. Exprimer le polynôme caractéristique $Q$ de la matrice $A^{-1}$ à l'aide de $P$ et de $n$ uniquement (Indication : transformer l'expression $P(0)Q(x)$ ).

**Exercice 13** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, on définit le déterminant de taille $n \times n$ :

$$D_n(a,b,c) := \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & & \ldots & 0 \\ c & a & b & 0 & & \\ 0 & & \ldots & & & \\ & & & a & b & 0 \\ & & 0 & c & a & b \\ 0 & & & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_2(a,b,c)$ et $D_3(a,b,c)$. Par convention on estime que $D_1(a,b,c) = a$
2. En développant par rapport à la première colonne, montrer la relation de récurrence

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

3. En déduire un le calcul de $D_n(1, 1, -1)$.