Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI2 – Année 2010/11
L2 Info

Feuille d'exercices n°5 :

Equations différentielles

Par convention on cherche des fonctions y dépendant de la variable x et que l'on suppose dérivable (jusqu'à l'ordre de l'équation différentielle. Selon les cas on pourra s'intéresser aux fonctions à valeurs complexes (mais la variable x est toujours réelle). Pour chacune des équations différentielles proposées, commencez par répondre aux questions : l'équation est-elle linéaire ? Est-elle à variables séparées ?

Exercice 1 Résoudre l'équation

$$(x^2+1)y' + xy = 1.$$

Exercice 2 Trouver les solutions des équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de définition de celles-ci :

1. $y' \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0$.
2. $xy' + y = 2x$.

Exercice 3 Résoudre l'équation

$$y' - (\cos x)y = \sin(2x).$$

Exercice 4 Résoudre l'équation

$$y' - 3y = x^2 + x + 1.$$

Exercice 5 On se propose d'étudier les solutions de l'équation différentielle suivante

$$(x^3 - x)y' + (1 - 2x^2)y + 1 = 0. \tag{1}$$

1. En se plaçant sur l'un des intervalles $(-\infty, -1[,]-1, 0[,]0, +1[$ ou $]+1, +\infty)$, résoudre l'équation (1).
2. Si y_1 est une solution disons sur $]-1, 0[$ et y_2 est une solution disons sur $]0, +1[$, on dit que les deux solutions *se raccordent* si elles vérifient :

$$\lim_{x\to 0^-} y_1(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2'(x)$$

   Déterminer quelles sont les solutions qui se raccordent en -1, 0, $+1$.
3. Existe-t-il une solution définie sur tout $\mathbb{R}$?

Exercice 6 Résoudre l'équation

$$y" - 3y + 2y = 1.$$

Exercice 7 On étudie l'équation

$$y" + 4y = g(x) \tag{2}$$

1. Décrire les solutions lorsque $g(x) = 0$.
2. On se place encore dans le cas $g(x) = 0$ et on impose les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$. Quel est le maximum (resp. le minimum) de $y(x)$ et en quels points sont-ils atteints ?
3. On suppose maintenant que $g(x) = \cos(ax)$ (où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre) ; calculer les solutions (on distinguera le cas $|a| = 2$).

4. Lorsque $|a| \neq 2$, montrer que les solutions sont bornées.
5. Lorsque $|a| = 2$, montrer que les solutions ne sont pas bornées.

Exercice 8 Résoudre les équations différentielles suivante

1. $y" - 2y' + y = \operatorname{ch} x$; puis $y" - 3y' + 2y = t \operatorname{sh} x$
2. $y" - 2y' + ay = \cos x$ (où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre)
3. $y" + y = x \sin x$; puis $y" + y = \cos^3 x$.

Exercice 9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on note E_d l'ensemble des fonctions de la forme $y(x) = P(x)\exp(\alpha x)$ avec $P(x)$ polynôme de degré $\leqslant d$.

1. Vérifier que E_d est un espace vectoriel de dimension $d+1$.
2. Pour toute fonction y deux fois dérivable, on pose $L(y) = y" + ay' + by$. Vérifier que L est une application linéaire de E_d vers E_d
3. Soit $F = \operatorname{Ker} L$ où $L : E_{\rightarrow} E_d$; montrer que $F = \{0\}$ (resp. $\dim F = 1$, resp. $dimF = 2$) lorsque α n'est pas racine de $X^2 + aX + b$ (resp. est racine simple, resp. est racine double).
4. En déduire que l'image de $L : E_{\rightarrow} E_d$ est E_d (resp. E_{d-1}, resp. E_{d-2}) lorsque α n'est pas racine de $X^2 + aX + b$ (resp. est racine simple, resp. est racine double).

Application : Utiliser l'observation qu'il existe une solution de la forme $(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x$ à l'équation différentielle $y" - 2y' + y = xe^x$ pour résoudre celle-ci.

Exercice 10 On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2y" + xy' - y = 0 \tag{3}$$

1. L'équation (3) est-elle linéaire ?
2. On se place sur l'intervalle $]0, +\infty)$. Effectuer le changement de variables $x = e^t$ (ou encore $t = \log x$) en introduisant la fonction $z(t) = y(e^t)$ et montrer que z vérifie une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle que vérifie $z(t)$ et en déduire une description des solutions de (3).

Exercice 11 On veut étudier les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$yy' = xy^2 + 1. \tag{4}$$

1. L'équation (4) est-elle linéaire ?
2. Montrer que la fonction $z(x) := y(x)^2$ vérifie une équation linéaire du premier ordre.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle que vérifie $z(x)$ et en déduire une description des solutions de (4).