Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MA3 – Année 2010/11
L2 Mass

Feuille d'exercices n°6 : Diagonalisation et trigonalisation de matrices ; applications

Diagonalisation et trigonalisation

Exercice 1 Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que

$$4A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2) En déduire le calcul de A^n.
3) Déterminer les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que la suite de vecteurs $(A^n x)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}^3$. Quelle est alors la limite de cette suite ?

Exercice 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$. supérieure.
3. On cherche à calculer les puissances T^n pour tout entier $n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que T peut s'écrire sous la forme $T = \lambda(Id + N)$, où λ est un réel et N est une matrice vérifiant $N^2 = 0$.
   (b) On rappelle que la formule du binôme
   $$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$
   est valide pour deux matrices carrées et de même ordre A et B qui *commutent*, c'est-à-dire vérifiant $AB = BA$. En déduire une expression simple pour T^n pour tout entier $n \geqslant 0$.
4. En déduire une expression pour A^n pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier par un calcul direct que $A^3 = -I$. En déduire une expression de A^n.
2. Retrouver ce résultat en diagonalisant (sur $\mathbb{C}$) la matrice A.

Exercice 4 [suite récurrente linéaire d'ordre 2, cas diagonalisable]

I. *Structure des solutions d'une équation de récurrence linéaire d'ordre* 2. On considère l'ensemble S des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles.

1. Montrer que S forme un espace vectoriel. On précisera quelles sont les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, ainsi que le vecteur nul.
2. On considère l'équation de récurrence suivante, pour une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + \frac{3}{2}\, u_{n+1}\,. \tag{1}$$
   Montrer que l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifient l'équation de récurrence (2) est un sous-espace vectoriel de S.

3. Donner une base de E et en préciser la dimension. *Indication :* on pourra vérifier que l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = \left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right)$ est un isomorphisme.

II. *Étude matricielle.* Considérons la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Trouver une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale, et calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \left(\begin{smallmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie l'équation de récurrence (2) si et seulement si $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1 .
4. Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série $\sum u_n$ est convergente. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 5 [suite récurrente linéaire d'ordre 2, cas trigonalisable] Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels telles que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n\,.$$

1. Montrer que la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ pour toute valeur de a, et que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $a \neq 1$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.
   (a) Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale. Que devient la base de vecteurs propres de A lorsque a se rapproche de la valeur 1 ?
   (b) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en supposant toujours $a \neq 1$). Trouver une base du sous-espace vectoriel F des suites bornées de E.
3. On considère maintenant le cas $a = 1$, et on se propose de calculer par deux méthodes la valeur de A^n pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) *Première méthode : calcul algébrique.* Trouver une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$, où T est une matrice triangulaire supérieure. Donner l'expression de T^n pour tout entier $n \geqslant 1$, et en déduire l'expression de A^n. *Indication :* on calculera d'abord T^2 et T^3, pour proposer une expression de T^n qu'on prouvera rigoureusement par récurrence.
   (b) *Deuxième méthode : argument de continuité.* Montrer que la matrice A^n, vue comme fonction du paramètre a, est continue en $a = 1$. Utiliser l'expression calculée précédemment de A^n, pour $a \neq 1$, pour en déduire la valeur de A^n pour $a = 1$.
   (c) Donner dans le cas $a = 1$ une base du sous-espace vectoriel F des suites bornées de E.

Exercice 6 Soit n un entier positif, et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Rappeler pourquoi $\mathcal{C}_E = (1, X, \cdots, X^n)$ est une base (souvent appelée canonique) de E.
2. Soit P un élément de E. Montrer que $(X^2-1)P'' + (2X+1)P' \in E$.
3. Soit f l'application de E définie par $f(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E, et écrire sa matrice dans la base $\mathcal{C}_E$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (c) On prend dans cette question $n = 3$. Calculer une base de vecteurs propres de f.

Application aux systèmes différentiels

Exercice 7 [utilisation de l'exponentielle de matrice] On reprend dans cet exercice des notions vues en cours.

1. Lorsque A est diagonale, exprimer la matrice $\exp(tA)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Plus généralement si $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, montrer que $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tA_1) & 0 \\ 0 & \exp(tA_2) \end{pmatrix}$.
3. Supposons $A = \alpha I + T$ avec T triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale. Montrer que $T^m = 0$, où m est la taille de la matrice, et la formule
$$\exp(tA) = e^{t\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{T^k}{k!}.$$
4. Montrer que si $A = PBP^{-1}$ alors $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.
5. Déduire des questions précédentes un procédés de calcul de $\exp(tA)$.
6. Soit X_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$X(t) = \exp(tA)X_0$$
est solution de l'équation différentielle matricielle suivante :
$$X' = AX, \quad X(0) = X_0\,.$$

Exercice 8 [système diagonalisable] On considère le système différentiel suivant :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x' = & 8x - 18y + 27z \\ y' = & -3x + \frac{7}{2}y - 6z \\ z' = & -4x + 7y - 11z \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales :
$$x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad z(0) = z_0\,.$$

1. Écrire le système (E) ci-dessus sous la forme $X' = AX$, pour une certaine matrice A de taille 3×3 à coefficients réels qu'on déterminera, et où $X(t)$ est le vecteur de coordonnées :
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$
2. Remarquer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, sont vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres 2, $-\frac{1}{2}$ et -1. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. On pose $X(t) = PY(t)$. Montrer que X est solution du système (E) si et seulement si les coordonnées u, v et w de Y sont solutions d'un système différentiel diagonal. Traduire les conditions initiales sur x, y et z en condition initiale sur Y.
4. Donner l'expression de $Y(t)$ en résolvant le système diagonal, et en déduire l'expression de x, y et z.
5. Donner l'expression de $Y(t)$ en calculant $\exp(tA)$.

Exercice 9 [système trigonalisable]
I. *Rappel sur la résolution des équations différentielles affines par la méthode de variation de la constante.*
Soit l'équation différentielle à résoudre :
$$x'(t) = 2x(t) + f(t). \tag{2}$$
où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x et y deux solutions de l'équation (2). Montrer que la fonction $x - y$ est solution de l'équation différentielle linéaire suivante :
$$z' = 2z. \tag{3}$$
2. En déduire que toute solution x de l'équation (2) s'écrit sous la forme $x(t) = z(t) + r(t)$, où r est une solution fixée de (2), dite *solution particulière*, et où z parcourt l'ensemble des solutions de (2).
3. Chercher une solution particulière de (2) sous la forme $r(t) = k(t)\exp(2t)$. En déduire la solution de (2) satisfaisant la condition initial $x(0) = x_0\,$.

4. Résoudre le même système différentiel en calculant $\exp(tA)$.

II. *Résolution d'un système différentiel non diagonalisable.*

1. Soit le système différentiel suivant :

$$(E) \qquad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2y + 2z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$$

   Exprimer le système (E) sous la forme $X' = AX$, où A est une matrice 3×3 à coefficients réels.

2. Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.
3. En posant $Y = P^{-1}X$, montrer que les coordonnées u, v et w de Y satisfont un système différentiel triangulaire. Résoudre ce système triangulaire en utilisant la méthode de la variation de la constante.
4. En déduire l'expression de l'unique solution x, y, z du système (E) satisfaisant les conditions initiales

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1.$$

5. Résoudre le même système différentiel en calculant $\exp(tA)$.

Exercice 10 Soit un système différentiel linéaire à coefficients constants donné par une matrice de taille $n \times n$:

$$X'(t) = AX(t).$$

On considère les propriétés suivantes.

(S) Stabilité : pour toutes les solutions on a $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$.

(B) Toutes les solutions restent bornées quand t tend vers l'infini.

Pouvez-vous caractériser ces propriétés en terme des valeurs propres de la matrice A ?