SUR LES HAUTEURS LOCALES DE NÉRON SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES.

Marc HINDRY (*)

Ce texte est une reprise d'une prépublication de l'université Paris VII, n° 51, janvier 1993. Les notes de bas de page indiquent les modifications ou corrections ultérieures; l'appendice arakelovien date de 1994. Une partie – mais pas la totalité – des résultats de ce texte est couverte par les deux publications de A. Werner [We1] et [We2] datant de 1997-98.

This text is a reprint of a preprint from Université Paris VII, n° 51, January 1993. The footnotes indicate subsequent modifications and corrections; the arakelovian appendix was written in 1994. Part – but not all – of the results are covered by the two papers of A. Werner [We1] et [We2] dated 1997-98.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de raffiner et préciser la théorie de Néron des "quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes" (Annals of Math. 82, 1965, [Né1]). Cette théorie des hauteurs de Néron normalisées est ici développée pour elle-même mais bien sûr je m'y suis intéressé pour des questions arithmétiques qui seront traitées ailleurs. Une fonction hauteur, sur une variété abélienne définie sur un corps de nombres ou un corps de fonctions est somme de fonctions quadratique, linéaire et bornée. Ce fait a été démontré simultanément par Néron et Tate; la partie fonction quadratique plus fonction linéaire est la hauteur de Néron-Tate ou hauteur canonique. La preuve de Tate est globale, simple et brillante; celle de Néron est longue et repose sur la décomposition des hauteurs en somme de hauteurs locales définie à des constantes près. Toutefois, en un sens, le travail de Néron est plus profond, donne plus de structures et contient la première formulation de la théorie des hauteurs en termes de fonctions de Green ou de Néron aux places archimédiennes et en termes de nombres d'intersection aux places finies; pour définir ces derniers, Néron avait recours à sa théorie des modèles minimaux des variétés abéliennes [Né2], appelés aujourd'hui modèles de Néron. Tate s'est aussi intéressé à cette décomposition et a précisé dans le cas des courbes elliptiques les constantes laissées indéterminées par Néron, en utilisant les équations de Weierstrass et le discriminant d'une courbe elliptique ainsi que sa théorie de l'uniformisation p-adique rigide ("courbe de Tate"). Je décris brièvement dans le paragraphe 1 toute cette théorie. Il n'y a pas d'analogue direct des équations de Weierstrass et du discriminant pour les variétés abéliennes de dimension $g \geq 2$; par exemple, une forme modulaire holomorphe non constante doit s'annuler sur l'espace de Siegel. Je montre néanmoins au paragraphe 2 qu'on peut fixer les constantes de Néron de manière fonctorielle en imposant que la moyenne sur les points de N-torsion tende vers zéro quand N tend vers l'infini. Le point délicat est de montrer l'existence de cette moyenne! Cette normalisation coïncide avec celle de Tate pour les courbes elliptiques et est d'ailleurs suggérée puis rejetée dans une lettre à Serre [Ta1]. Le coeur de ce travail est le paragraphe 3 où je donne des formules explicites pour ces hauteurs locales en combinant la théorie de l'intersection sur les modèles de Néron et la théorie de l'uniformisation rigide analytique, le rôle de la courbe de Tate étant alors joué par les extensions de Raynaud [Ra1]. Pour une place complexe, apparaît une fonction "$R(\tau)$" sur l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g qui est un analogue de la fonction "delta" introduite par Faltings sur l'espace des modules des courbes de genre g.

Pour une place finie avec mauvaise réduction semi-stable apparaît une fonction de Bernoulli généralisée liée à la forme quadratique donnée par les relations de périodes de Riemann (leur analogue en géométrie rigide). Le lecteur familier avec le théorème du cube reconnaîtra sa trace un peu partout dans ce texte, j'explicite au paragraphe 4 un lien avec les extensions de structures cubistes de Moret-Bailly [M-B]. Enfin dans le dernier paragraphe je décris succintement l'analogue sur les corps de fonctions de ces hauteurs locales. Je termine cette introduction en signalant deux travaux consacrés dans un esprit assez différent aux "symboles" de Néron [Ka] et [Tu] ainsi que l'ouvrage de Rumely [Ru] qui m'a été signalé par Michel Langevin et William Cherry.

J'espère que le texte rend hommage à Néron, Tate et Raynaud; c'est un plaisir aussi de remercier les personnes qui y ont contribué par des suggestions, échanges d'idées et encouragements, notamment J-B. Bost, D. Bertrand, S. David et J. Silverman.

(*) Août 2016. Correspondance : Université Paris Diderot, marc.hindry@imj-prg.fr

1. LE TRAVAIL DE NÉRON.

Dans toute la suite, excepté durant le paragraphe 5, la lettre K désigne un corps de nombres, O_K son anneau d'entiers et $d = [K : \mathbf{Q}]$ le degré de l'extension, S_K l'ensemble de ses places normalisées de la façon suivante: si v est une place de K on note K_v le complété de K et $d_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$ le degré local; si v est archimédienne, elle est associée à un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et alors $|x|_v := |\sigma(x)|$; si v est non archimédienne, elle est associée à un idéal premier $\wp$ de norme $N(v) = N(\wp) = \mathrm{card}\, O_K/\wp$ et alors $|x|_v := N(\wp)^{-\mathrm{ord}_\wp(x)/d_v}$; avec cette normalisation qui est celle adoptée par exemple dans [La1] les valeurs absolues sont invariantes par extension (i.e. si w est une place au dessus de v on a: $|.|_w = |.|_v$) et la formule du produit s'écrit:

$$\sum_v d_v \log |x|_v = 0 \tag{1.1}$$

La somme est prise sur toutes les places de S_K, pour x dans $K \setminus \{0\}$. La hauteur de Weil d'un point P de coordonnées homogènes $(x_0; \ldots ; x_n)$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ est définie par la formule:

$$h(P) := [K : \mathbf{Q}]^{-1} \sum_v d_v \log \max |x_i|_v. \tag{1.2}$$

Cette définition est indépendante des coordonnées et du corps K; la fonction h est donc définie sur $\mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$; si l'on pose $h_v(P) = \log \max |x_i/x_0|_v$ et note D l'hyperplan $x_0 = 0$ on a pour tout P non situé sur D:

$$[K : \mathbf{Q}]h(P) = \sum_v d_v h_v(P) \tag{1.3}$$

Plus généralement on sait associer à un diviseur D sur une variété projective X une hauteur dite de Weil $h_D : X(\bar{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ unique à une fonction bornée près. Ces hauteurs possèdent une décomposition analogue à (1.3) avec des fonctions $h_{D,v} : X \setminus |D| \to \mathbf{R}$ où $|D|$ désigne le support du diviseur D (voir [La1] ou [Se]) et chaque fonction $h_{D,v}$ est aussi définie à une fonction bornée près $O_v(1)$ (telles que $\sum_v O_v(1) = O(1)$). On sait que si D est un diviseur sur une variété abélienne X alors il existe une unique hauteur dite de Néron-Tate $\hat{h}_D$ qui est somme d'une fonction quadratique et d'une fonction linéaire. Si D est symétrique, la formule de Tate est $\hat{h}_D(x) := \lim 4^{-n} h_D(2^n x)$ et on obtient une forme quadratique. Pour énoncer le raffinement de Néron quand X est une variété abélienne j'aurai besoin de la notion suivante: si X est une variété quasi-projective définie sur K on considère des familles de fonctions $\{f_v\}_{v \in S_K}$ où $f_v : X(K_v) \to \mathbf{R}$; je dirai qu'une telle famille est K-constante si il existe une suite presque nulle de réels $\{g_v\}_{v \in S_K}$ telle que $f_v(x) = g_v$.

a) Les hauteurs locales. Le théorème fondamental suivant est prouvé dans [Né1] (voir aussi [La1]).

Théorème 1.1 (Néron) *Il existe une application qui à chaque diviseur D sur une variété abélienne A définie sur K associe une famille de fonctions continues $\Lambda_{D,v} : A(K_v) \setminus |D| \to \mathbf{R}$ telles que:*

(i) Pour tout diviseur D, D' sur A, il existe une K-constante $\{\kappa_v\}_{v \in S_K}$ telle que:

$$\Lambda_{D+D',v}(P) = \Lambda_{D,v}(P) + \Lambda_{D',v}(P) + \kappa_v \tag{1.4}$$

(ii) Pour tout morphisme $\alpha : A \to B$ de variétés abéliennes et tout diviseur D sur B, il existe une K-constante $\{\kappa_v\}_{v \in S_K}$ telle que:

$$\Lambda_{\alpha * D,v}(P) = \Lambda_{D,v}(\alpha(P)) + \kappa_v \tag{1.5}$$

(iii) Si D est le diviseur d'une fonction rationnelle f, il existe une K-constante $\{\kappa_v\}_{v \in S_K}$ telle que:

$$\Lambda_{D,v}(P) = \Lambda_{(f),v}(P) = -\log |f(P)|_v + \kappa_v \tag{1.6}$$

De plus cette famille est unique à une K-constante près.

Remarques: 1) si l'on définit $\Lambda_D(P) := [K : \mathbf{Q}]^{-1} \sum_v d_v \Lambda_{D,v}(P)$ on voit facilement que Λ_D est une hauteur de Weil associée à D qui vérifie $\Lambda_{D+D'}(P) = \Lambda_D(P) + \Lambda_{D'}(P) + \kappa$; $\Lambda_{\alpha^* D}(P) = \Lambda(\alpha(P)) + \kappa$ et $\Lambda_{(f)}(P) = \kappa$; en appliquant le théorème du cube (voir [Mu1]) on obtient:

$$\sum_I (-1)^{\mathrm{card}(I)} s_I^*(D) = (f) \tag{1.7}$$

où I parcourt les sous-ensembles de $\{1,2,3\}$ et $s_I(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i\in I} x_i$. On sait alors que:

$$\sum_I (-1)^{\mathrm{card}(I)} \Lambda_D(s_I(x_1,x_2,x_3)) = \kappa,$$

ce qui entraîne aisément que Λ_D est somme de fonctions quadratique, linéaire et constante, en d'autres termes c'est à une constante près la hauteur de Néron-Tate:

$$\hat{h}_D(P) = [K:\mathbf{Q}]^{-1} \sum_v d_v \Lambda_{D,v}(P) + \kappa \tag{1.8}$$

2) Un morphisme entre variétés abéliennes est composé d'un homomorphisme et d'une translation; on sait que les fonctions de Néron sont caractérisées par les propriétés (i) (iii) et la propriété (ii) où l'on ne prend que la multiplication $[2]_A$ ou bien seulement les translations.

3) les propriétés (i) et (iii) montrent que $\Lambda_{D,v}$ a un pôle logarithmique le long de D; plus précisément si sur un ouvert U on a $D_{|U} = (f)_{|U}$ alors pour $P \in U(K_v)\setminus|D|$ on a $\Lambda_{D,v}(P) = -\log|f(P)|_v +$ fonction continue.

4) On peut aisément étendre les hauteurs locales de Néron à $A(\bar{K}_v)\setminus|D|$: il suffit d'observer que si L est une extension finie de K, w une place de L au dessus d'une place v de K on a $|x|_v = |x|_w$ et donc toute famille de fonction de Néron $\Lambda_{D,w}$ vérifie (i), (ii) et (iii) et donc coïncide sur les $A(K_v)$ avec $\Lambda_{D,v}$ à une constante près; il y a donc une unique extension cohérente à $A(\bar{K}_v)\setminus|D|$.

b) Formules "explicites". Néron en précurseur d'Arakelov, et en successeur de la pléiade des mathématiciens qui tentèrent de tisser ou unifier géométrie et arithmétique a aussi donné une interprétation des $\Lambda_{D,v}$ comme nombres d'intersections aux places finies et comme valeurs de fonction de Green (dites aussi dans ce cas de Néron) aux places archimédiennes.

Si v est une place archimédienne, la théorie classique des variétés abéliennes décrit $A(\bar{K}_v)$ comme un tore complexe $\mathbf{C}^g/\Omega$ où Ω est un réseau munie d'une forme de Riemann H_D associée au diviseur D. Le diviseur D est représenté par une fonction thêta Θ_D et quitte à modifier la fonction par un facteur exp{quadratique +linéaire}, on peut supposer que la fonction vérifie l'équation fonctionnelle: $\Theta_D(z+w) = \Theta_D(z)\exp\{\pi H_D(z,w) + \frac{\pi}{2}H_D(w,w) + 2\pi i S(w)\}$ où $S(w)$ désigne une fonction réelle; la fonction $G_D(Z) := |\Theta_D(Z)|e^{-\frac{\pi}{2}H_D(Z,Z)}$ est alors Ω-périodique et fournit la fonction de Néron. Plus précisement, si $Z_v(P)$ désigne le paramètre complexe correspondant au point P, on a:

$$\Lambda_{D,v}(P) = -\log G_D(Z_v(P)) + \kappa \tag{1.9}$$

Remarque: cette fonction correspond à la fonction de Green introduite par Parshin et Arakelov [Ar] et c'est un courant de Green au sens de Gillet et Soulé [G-S1,2] (à une constante près dépendant des auteurs).

Aux places finies Néron utilise sa théorie des "modèles minimaux" appelés aujourd'hui modèles de Néron (voir [Né2] ou [B-L-R]):

Theorème 1.2. (Néron) *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, il existe un unique schéma en groupes $\mathcal{A}/R$ lisse sur $R := \mathrm{spec}(O_K)$ vérifiant la propriété universelle suivante (U) : pour tout schéma $\mathcal{X}$ lisse sur R, avec fibre générique $\mathcal{X}_K = X$, tout K-morphisme $X \to A$ s'étend de manière unique en un morphisme de R-schémas $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$.*

La propriété (U) est si forte que l'unicité est claire, l'existence peut paraître miraculeuse. La fibre spéciale au dessus de v, notée $\mathcal{A}_v = \mathcal{A}\times_R \mathrm{spec}(O_K/\wp_v)$ est un groupe algébrique sur le corps fini $O_K/\wp_v$; sa composante neutre $\mathcal{A}_v^0$ est une extension de variété abélienne par un groupe linéaire commutatif (essentiellement $(\mathbf{G}_a)^s \times (\mathbf{G}_m)^t$) et le groupe des composantes sera noté $\Phi_v = \mathcal{A}_v/\mathcal{A}_v^0$; c'est un groupe abélien fini. Je donne quelques définitions sous la forme qui nous sera commode:

Définitions. 1) A a *bonne réduction* (resp. *mauvaise réduction*) en v si et seulement si $\mathcal{A}_v$ est une variété abélienne (resp. n'est pas une variété abélienne); il y a un nombre fini de mauvaise places.
2) A a réduction *semi-stable* en v si $\mathcal{A}_v^0$ ne contient aucun sous-groupe unipotent; si l'on passe à une extension finie K' de K bien choisie, la réduction est toujours semi-stable.
3) Si A a mauvaise réduction semi-stable on dit que la réduction est "torique" si $\mathcal{A}_v^0$ est un tore (essentiellement $\mathbf{G}_m^g$) et "mixte" si la partie abélienne est non nulle; cette dernière définition est introduite dans un but "pédagogique", la réduction torique étant plus simple à étudier et beaucoup plus documentée dans la littérature.

Par la propriété universelle (U) tout point P appartenant à $A(K) = \mathrm{Mor}(\mathrm{spec}(K), A)$ s'étend en une section notée encore $P : R = \mathrm{spec}(O_K) \to \mathcal{A}$ (bien que A ne soit pas propre sur R en général!). En particulier P rencontre une unique composante de chaque fibre spéciale; notons $j_v(P) \in \Phi_v$ cette composante. Un diviseur D sur A s'étend en un diviseur $\mathcal{D}$ sur le schéma $\mathcal{A}_v$ en gardant les multiplicités et en prenant l'adhérence de Zariski de chaque composante irréductible; remarquons que $\mathcal{A}_v$ est lisse, donc $\mathcal{D}$ est un diviseur de Cartier et correspond à un faisceau inversible noté $O(\mathcal{D})$. Si v est une place finie de K (un point fermé de R) et si $P \in A(K) \| D|$ on peut définir la *multiplicité d'intersection* de D et P ainsi : $P^*O(\mathcal{D})$ est un faisceau inversible sur R et $P^*(\mathcal{D})$ est un diviseur sur R , on peut définir sa norme ou son ordre en v; on pose:

$$i_v(D,P) := i_v(\mathcal{D},P) = \mathrm{ord}_v(P^*(\mathcal{D})) \tag{1.10}$$

Ainsi en particulier

$$\log \mathrm{Norme}\, P^*(\mathcal{D}) = \sum_v i_v(D,P) \log N(v) \qquad (1.11).$$

La formule de Néron est alors: il existe une application $B_{D,v} = B_v : \Phi_v \to \mathbf{R}$ telle que

$$\Lambda_{D,v}(P) = \log N(v)\{i_v(D,P) + B_v(j_v(P)\} \tag{1.12}$$

Remarques: Néron montre aussi que si l'on choisit bien les $\Lambda_{D,v}$, on peut imposer que B_v soit à valeurs dans $\mathbf{Q}$ et même avec un dénominateur divisant deux fois l'ordre de Φ_v; il fournit aussi le calcul de B_v pour une courbe elliptique semi-stable (Cf [Né1] p317-18 ou l'alinéa suivant). La lettre "B" est choisie à la fois pour "bad" et pour "Bernoulli". Les formules (1.9) et (1.12) paraissent dissemblables mais nous verrons au paragraphe 3 qu'on peut les unifier.

c) Le supplément de Tate. Sur les courbes elliptiques, Tate a raffiné la théorie de Néron dans une lettre à Serre ([Ta1] "unpublished as usual", mais à paraître dans les oeuvres choisis et exposée en grande partie dans [La2]). D'abord il a donné un moyen de fixer les constantes et d'avoir donc des hauteurs locales canoniques (ce sont celles-ci qui sont utilisées dans [Si] et [Hi-Si]) et ensuite il retrouve la fonction B_v de Néron dans le cas de réduction semi-stable en utilisant la "courbe de Tate". Soit E une courbe elliptique définie sur K et un modèle de Weierstrass de $E \setminus \{0\}$:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{1.13}$$

et notons Δ son discriminant. On doit choisir une fonction $\Lambda_v = \Lambda_{(0),v}$ et ensuite on posera $\Lambda_{D,v}(P) := \sum_i n_i \Lambda_v(P - Q_i)$ pour $D = \sum_i n_i(Q_i)$. On sait que

$$\Lambda_v(P+Q) + \Lambda_v(P-Q) - 2\Lambda_v(P) - 2\Lambda_v(Q) = -\log |x(P) - x(Q)|_v + C_v \tag{1.14}$$

et on fixe Λ_v de sorte que $C_v = \log |\Delta|_v/6$; ce choix est indépendant du modèle (1.13) choisi. On voit aussi que $\Lambda := [K : \mathbf{Q}]^{-1} \sum_v d_v \Lambda_v$ satisfait la loi du parallélogramme et donc $\Lambda = \hat{h}$ est bien quadratique. Dans le cas de bonne réduction on obtient $B_v = 0$ et dans le cas de mauvaise réduction semi-stable on peut calculer B_v ainsi: Quitte à effectuer une extension quadratique non ramifiée on dispose d'une paramétrisation de Tate $K_v^*/q_v^{\mathbf{Z}} \to E(K_v)$; notons $N_v := \mathrm{ord}_v(\Delta) = \mathrm{ord}_v(q_v)$ et $\mathcal{E}$ le modèle de Néron de E ; le groupe des composantes $\Phi_v = \mathcal{E}_v/\mathcal{E}_v^0$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/N_v Z$ et si P a pour paramètre $t \in K_v^*$ on a $j_v(P) = \mathrm{ord}_v(t) \bmod N_v$. La courbe est uniformisée par la fonction thêta p-adique :

$$\Theta(t) = (1-t) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q_v^m t)(1 - q_v^m t^{-1}) \tag{1.15}$$

Si P a pour paramètre $t \in K_v^*$, la fonction de Néron s'écrit alors :

$$\Lambda_v(P) = -\log|\Theta(t)|_v - (1/2)B'(\mathrm{ord}_v(t)/N_v)\log|\Delta|_v \tag{1.16}$$

où $B'(X) = X^2 - X + 1/6$ est le deuxième polynôme de Bernoulli. Avec les notations du paragraphe précédent on peut écrire :

$$B_v(j_v(P)) = (1/2)B(j_v(P)/N_v)\,\mathrm{ord}_v(\Delta) \tag{1.17}$$

où maintenant $B(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nx)/2\pi n^2$ est la fonction de Bernoulli égale à B' sur $[0,1]$ et prolongée par périodicité. Tate observe que si v est archimédienne $\int_{E(\mathbf{C})} \Lambda_v(z)dm(z) = 0$ et si v est non archimédienne $n^{-2}\sum'_{P\in E_n} \Lambda_v(P)$ tends vers zéro quand n tend vers l'infini (on exclus bien sûr 0 dans la sommation). Nous prenons cette idée comme point de départ pour normaliser les fonctions $\Lambda_{D,v}$ en dimension supérieure et calculer les fonctions B_v au moins dans le cas semi-stable.

2. HAUTEURS LOCALES NORMALISÉES.

Définition: j'appellerai hauteurs locales normalisées la famille des fonctions $\Lambda_{D,v}$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 1 et les normalisations suivantes:

$(N1)$: si v est une place archimédienne et μ la mesure de Haar-Lebesgue sur $A(\bar{K}_v)$:

$$\int_{A(\bar{K}_v)} \Lambda_{D,v}(P)d\mu(P) = 0 \tag{N1}$$

$(N2)$: si v est une place non archimédienne :

$$\lim_{N\to\infty} N^{-2g} \sum_{P\in A_N\setminus|D|} \Lambda_{D,v}(P) = 0 \tag{N2}$$

Remarques: 1) L'unicité est évidente et, si on se restreint aux courbes elliptiques, cette normalisation coïncide avec celle de Tate pour le diviseur "canonique" $D = (0)$ mais pas en général (voir la remarque 1 suivant le théorème 3). 2) L'existence de l'intégrale est claire dans le cas archimédien car $\Lambda_{D,v}$ n'a qu'une singularité logarithmique le long de D; par contre l'existence de la limite dans le cas non archimédien mérite une démonstration (qui est donnée ci-après); je montre d'ailleurs que, pour une place archimédienne, la normalisation $(N2)$ pourrait être utilisée à la place de $(N1)$ 3) Une "bonne" normalisation des $\Lambda_{D,v}$ devrait être aussi fonctorielle que possible et donner une décomposition de la hauteur de Néron-Tate sans constante parasite; admettant momentanément l'existence de la limite dans $(N2)$, le théorème suivant est facile et plaide en faveur de notre normalisation:

Théorème 2.1. *Soit $\Lambda_{D,v}$ la famille des hauteurs locales normalisées, i.e. vérifiant $(N1)$ et $(N2)$, alors:*

(i) Pour tout diviseur D, D' sur A :

$$\Lambda_{D+D',v}(P) = \Lambda_{D,v}(P) + \Lambda_{D',v}(P). \tag{2.1}$$

(ii) Soit un morphisme $\alpha : A \to B$ de variétés abéliennes et un diviseur D sur B, supposons que α soit un homomorphisme surjectif, ou bien que α soit une translation quelconque si v est archimédienne, par un point de torsion sinon, alors:

$$\Lambda_{\alpha^*D,v}(P) = \Lambda_{D,v}(\alpha(P)). \tag{2.2}$$

(iii) Si P n'appartient pas au support de D on a [(1)]:

$$\hat{h}_D(P) = [K : \mathbf{Q}]^{-1}\sum_v d_v\Lambda_{D,v}(P) + \kappa(A,D). \tag{2.3}$$

[(1)] *Dans la prépublication originale, il était affirmé de manière erronée que la constante $\kappa(A,D)$ était nulle (l'erreur m'a été signalée par J-B. Bost). En fait cela n'est vrai que pour les courbes elliptiques, voir l'appendice rajouté à ce texte où la constante $\kappa(A,D)$ est calculée pour une variété abélienne ayant bonne réduction partout. Le paragraphe de la prépublication originale, qui prétendait fournir une preuve de la nullité de $\kappa(A,D)$, est supprimé ici en particulier le "théorème" 2.2.*

3. UNIFORMISATION ET FORMULES EXPLICITES.

J'entends par uniformisation une application analytique $U \to A$ où U est un revêtement universel de A. Ce concept est classique sur le corps des complexes; on sait que $A(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^g/\Omega$ où Ω est un réseau isomorphe à l'homologie de $A(\mathbf{C})$ ou encore à son groupe fondamental. La géométrie rigide, ici principalement Tate [Ta2] et Raynaud [Ra1] nous a appris l'analogue non-archimédien. Il faut d'abord se convaincre du fait (a priori étonnant?) qu'en géométrie rigide $\mathbf{G}_m$ est simplement connexe, tout comme une variété avec bonne réduction. On arrive alors à l'idée de départ de Raynaud [Ra1]: quand A a réduction semi-stable, le revêtement universel de $A(K_v)$ est une extension G d'une variété abélienne C ayant bonne réduction en v par un tore T, i.e. on a un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & M & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & T & \to & G & \to & C & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & A & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

où M est un réseau de G (de rang la dimension de T). Par exemple si $T = 0$ (bonne réduction), la géométrie rigide ne nous enseignera rien car A est sa propre uniformisation; si $B = 0$ (réduction torique) alors $G = T$ et on peut développer la théorie en analogie avec le cas archimédien, à condition d'adopter le point de vue de Jacobi: $A(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{*g}/\exp(2\pi i\Omega)$; le cas général (réduction mixte) est comme on peut s'y attendre un mélange. J'utilise cette théorie essentiellement due à Raynaud pour donner des formules explicites pour les $\Lambda_{D,v}$ (i.e. les B_v). Ceci permet une unification des formules (1.9) et (1.12) de Néron qui est agréable pour l'esprit.

A) Bonne réduction. Nous savons d'après Néron que si A a bonne réduction en v, alors $\Lambda_{D,v}(P) = i_v(D,P)\log N(v) + \kappa$ et la moyenne sur les points de torsion du membre de droite tend vers κ qui est donc nul[(2)] . On a donc prouvé la formule:

Théorème A. *Si A possède bonne réduction en v et si P n'est pas situé sur D on a :*

$$\Lambda_{D,v}(P) = i_v(D,P)\log N(v)$$

En particulier $\Lambda_{D,v(P)} \geq 0$, et cette inégalité reste vraie si l'on suppose seulement que A a bonne réduction potentielle en v.

La dernière phrase est claire si on se souvient que pour une extension w de v on a $\Lambda_{D,w} = \Lambda_{D,v}$ sur $A(K_v)\backslash|D|$.

B) Place archimédienne. Nous avons vu que avec les notations du premier paragraphe

$$\Lambda_{D,v}(P) = -\log|\Theta_D(Z_v(P))|e^{-\frac{\pi}{2}H_D(Z_v(P),Z_v(P))} + \kappa(D,v)$$

et par conséquent la normalisation $(N1)$ indique que

$$\kappa(D,v) = \int_{A(\bar{K}_v)} \Big(\log|\Theta_D(Z_v(P))| - \frac{\pi}{2}H_D(Z_v(P),Z_v(P))\Big)\,d\mu(P).$$

(2) Le fait que, dans le cas de bonne réduction, la moyenne des multiplicités d'intersection est nulle, n'est pas établi dans ce texte (cela était déduit des considérations erronées du paragraphe 2, qui ont été supprimées). L'affirmation est néanmoins vraie, comme l'a prouvé J. Boxall "*Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variétés abéliennes*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux 7 (1995), p. 111–119.

Explicitons cela dans le cas où D est symétrique et induit une polarisation principale sur le modèle classique $A(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau\mathbf{Z}^g$ avec τ dans le “demi-espace” de Siegel $\mathcal{H}_g$. On sait que la fonction de Riemann :

$$\Theta(Z,\tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^g} \exp\{\pi i^t m\tau m + 2\pi i^t m Z\} \tag{3.2}$$

a pour diviseur $D+u$ avec u point de 2-torsion (une caractéristique); inversement la polarisation principale correspond à 2^{2g} diviseurs symétriques : les translatés de D par des points de 2-torsion. Pour simplifier les notations supposons que D est le diviseur de $\Theta(Z,\tau)$, alors on définit la fonction invariante par translation par $\mathbf{Z}^g + \tau\mathbf{Z}^g$:

$$G(Z,\tau) := |\Theta(Z,\tau)| \exp(-\pi^t \mathrm{Im}\, Z (\mathrm{Im}\,\tau)^{-1} \mathrm{Im}\, Z) \tag{3.3}$$

où bien sûr Im désigne la partie imaginaire . Remarquons que la fonction thêta normalisée au sens du premier paragraphe serait $\Theta_0(Z,\tau) = \Theta(Z,\tau)\exp\{(\pi/2)^t Z(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1} Z\}$, ce qui explique le décalage des formules; on va alors utiliser la fonction:

$$R'(\tau) := \int_{A(\mathbf{C})} \log G(Z,\tau) d\mu(Z) \tag{3.4}$$

où $d\mu$ désigne la mesure de Haar Lebesgue qui donne volume 1 à $A(\mathbf{C})$.

Théorème B *Soit v une place archimédienne, $Z_v(P)$ un paramètre du point P dans l'uniformisation $A(\bar{K}_v) = \mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau_v\mathbf{Z}^g$, notons D le diviseur de $\Theta(.,\tau_v)$, alors :*

$$\Lambda_{D,v}(P) = -\log G(Z_v(P),\tau_v) + R'(\tau_v).$$

Commentaire: cette formule explicite fait apparaître une fonction très intéressante sur l'espace de Siegel. Si $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est une matrice symplectique à coefficients entiers, en utilisant l'équation fonctionnelle de la fonction de Riemann (voir par exemple [Ig]) par rapport à la transformation $(Z,\tau) \mapsto ({}^t(C\tau+D)^{-1}Z, (A\tau+B)(C\tau+D)^{-1})$ on voit aisément que:

$$R'((A\tau+B)(C\tau+D)^{-1}) = R'(\tau) + (1/2)\log|\det(C\tau+D)| \tag{3.5}$$

Ceci suggère de définir la fonction:

$$R(A_\tau)) := R'(\tau) + (1/4)\log\det(\mathrm{Im}\,\tau) \tag{3.6}$$

qui est donc invariante par $\Gamma := \mathrm{Sp}_g(\mathbf{Z})$ et définit une fonction réelle analytique sur l'espace des modules de variétés abéliennes principalement polarisées $\mathcal{A}_g(\mathbf{C}) = \Gamma\backslash\mathcal{H}_g$. Cette fonction R définit une distance logarithmique au bord $\overline{\mathcal{A}}_g \setminus \mathcal{A}_g$ analogue à la fonction delta définie par Faltings sur l'espace des modules de courbes [Fa1]. Bien sûr dans le cas des courbes elliptiques les deux notions coïncident; plus précisément on a la relation : $\delta(E_\tau)) = -24R(\tau) - 8\log(2\pi)$. Dans le cas où $g=2$ et A_τ est la jacobienne d'une courbe C, Bost ([Bo], prop.4) a démontré que:

$$\delta(C) = -4R(A_\tau)) - \log(|\Delta(\tau)|(\det\mathrm{Im}\,\tau)^5) - 16\log(2\pi)$$

où $\Delta(\tau)$ désigne la forme modulaire parabolique classique de Siegel de poids 10. Il est certainement intéressant de comparer $\delta(C)$ et $R(\mathrm{Jac}(C))$, d'étudier le comportement de $R(A_\tau))$ quand A_τ dégénère vers le bord d'une compactification (de Satake ou toroïdale), je me contente ici de donner une estimation obtenue avec l'aide de Sinnou David (voir [Fr] pour une définition du domaine fondamental de Siegel):

Proposition 3.1. *Il existe une constante C_g ne dépendant que de la dimension g telle que:*

$$-(\pi/12)\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\,\tau) + (1/4)\log\det\mathrm{Im}\,\tau - C_g \le R(\tau) \le -(g/4)\log 2$$

(dans le membre de gauche τ est supposée être dans le domaine fondamental de Siegel).

Preuve: on considère $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_2 \end{pmatrix}$ avec τ_2 matrice $(g-r)\times(g-r)$ tendant vers $i\infty$ et τ_1 et τ_{12} restant bornées. On suppose que τ reste dans le domaine fondamental de Siegel et on pose $\tau = S + iT$ et $Z = X + \tau Y$; $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ avec des coordonnées dans $I :=]-1/2, 1/2[$. On voit aisément que $\lim \Theta_g(X + \tau Y, \tau) = \Theta_r(X_1 + \tau_1 Y_1 + \tau_{12} Y_2, \tau_1)$; l'indice de chaque fonction Θ étant écrit juste pour rappeler la dimension. On obtient donc par compacité (i.e en utilisant la compactification de Satake, voir [Fr]):

$$\begin{aligned}\int_{I^{2g}} \log|\Theta_g(X+\tau Y,\tau)|dXdY &\geq \int_{I^{2g}} \log|\Theta_r(X_1+\tau_1Y_1+\tau_{12}Y_2,\tau_1)|dXdY + O(1)\\ &= \int_{I^{2g}} \log G_r(X_1+\tau_1Y_1+t_{12}Y_2,\tau_1)dXdY + \\ &\quad + \pi\int_{I^{2g}} {}^t(T_1Y_1+T_{12}Y_2)T_1^{-1}(T_1Y_1+T_{12}Y_2)dXdY + O(1)\\ &= R'_r(\tau_1) + (\pi/12)\operatorname{Tr}(T_1) + (\pi/12)\operatorname{Tr}(T_{12}T_1^{-1}T_{12}) + O(1)\end{aligned}$$

et on obtient la première inégalité par récurrence sur g; la deuxième est plus facile, car, d'après [Ig] lemme II.5.7 on a:

$$\int_{I^{2g}} \sqrt{\det(\operatorname{Im}\tau)}G_g^2(X+:\tau Y,T)dXdY = 2^{-g/2}.$$

On applique alors l'inégalité de Jensen à la fonction concave log.

Remarques: l'inégalité de gauche est assez fine car elle donne une égalité à $O(1)$ près quand T est diagonale, mais on peut la raffiner en général en remplaçant $\operatorname{Tr}(\operatorname{Im}\tau)$ par $\operatorname{Tr}(D)$ où D est la partie diagonale de la décomposition de Jacobi $\operatorname{Im}\tau = {}^tBDB$ (voir [Fr]).

Enfin, pour suggérer les analogies avec l'analyse non-archimédienne, je reécris la formule du théorème B dans le modèle de Jacobi $A(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau\mathbf{Z}^g \cong \mathbf{C}*^g/\exp 2\pi i\tau\mathbf{Z}^g$. Posons $q_{jl} := \exp(\pi i\tau_{jl})$ et $t_j := \exp(2\pi i Z_j)$ et pour m dans $\mathbf{Z}^g$ notons $q(m,m) := \prod_{i,j} q_{ij}^{m_im_j}$ et $t^m := \prod_j t_j^{m_j}$, alors $\Theta(Z,t) = \Theta(t,q) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^g} q(m,m)t^m$ et $\pi\,{}^t\operatorname{Im}Z(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\operatorname{Im}Z = (1/4)t((-\log|t_j|))((-\log|q_{ij}|))^{-1}((-\log|t_j|))$; ainsi si l'on pose $Q := ((-2\log|q_{ij}|))$ et $f := ((-\log|t_j|))$ on peut reécrire la formule du théorème B ainsi:

$$\Lambda(Z,t) = \Lambda(t,q) = -\log|\Theta(t,q)| + (1/2){}^tfQ^{-1}f + R(q) \tag{3.7}$$

C) Réduction torique. On suppose ici que $\mathcal{A}_v^0$ est un tore déployé $T = \mathbf{G}_m^g$ (l'hypothèse "déployé" n'est pas nécessaire mais simplifie la discussion); on sait que dans ce cas on dispose d'une uniformisation $(K_v^*)^g \to A(K_v)$ dont le réseau multiplicatif des périodes Ω est engendré par disons $e_i = ((q_{ij}^2))$, d'après la théorie de Raynaud ([Ra1], [B-L2]); on peut consulter [Ge] pour une description plus précise ainsi que [Mu3] pour une construction; par analogie avec le cas complexe, pour t dans $(K_v^*)^g$ et m dans $\mathbf{Z}^g$ notons $q(m,m) := \prod_{i,j} q_{ij}m_im_j$ et $t^m := \prod_j t_j^{m_j}$ et enfin $\Theta(t,q) := \sum_{m\in\mathbf{Z}^g} q(m,m)t^m$. La fonction Θ justifie son nom par l'équation fonctionnelle $\Theta(t\prod e_im_i) = \Theta(t)t^mq(m,m)^{-1}$. Il est facile de voir (Morikawa [Mo]) que cette série est convergente si l'on connait les relations de Riemann $Q := ((2\operatorname{ord}_v(q_{ij})))$ est symétrique définie positive; posons $f := ((\operatorname{ord}_v(t_j)))$ et considérons la fonction:

$$\Lambda(t,q) := -\log|\Theta(t,q)|_v + (1/2){}^tfQ^{-1}f\log N(v) + \kappa \tag{3.8}$$

On vérifie aisément que Λ est Ω-périodique, possède un pôle logarithmique le long du diviseur de Q et est "fonctorielle" puisqu'à la somme de diviseurs correspond le produit des fonctions thêta et le terme quadratique rendant périodique la fonction est additif; de plus la fonctorialité par rapport aux translations ou à la multiplication [2] est immédiate. On voit donc que pour une constante κ bien choisie, la formule (3.8) définit la fonction de Néron cherchée; les notations sont bien sûr choisies pour suggérer l'analogie avec (3.7). Calculons κ et déchiffrons la fonction B_v dans la formule (3.8).

Lemme-définition 3.2. *Soit M un réseau de $\mathbf{R}^g$ muni d'une norme euclidienne $||\cdot||$, alors*

$$F := \{x \in \mathbf{R}^g \text{ tel que } ||x|| = \min_{m\in M} ||x+m||\}$$

est un domaine fondamental pour M. On l'appelle le domaine fondamental naturel de M par rapport à la norme $||\cdot||$.

Il est clair que $\cup_{m\in M} F + m = \mathbf{R}^g$ et que si $m \neq 0$ alors F et $F+m$ ne peuvent s'intersecter que sur le bord. On peut aussi remarquer que, F étant défini par les inégalités $||x+m||^2 - ||x||^2 \geq 0$, c'est un polyèdre convexe et symétrique par rapport à l'origine.

La norme en vue est $||x||_Q^2 := {}^t x Q^{-1} x$ et le réseau $L_Q = Q\mathbf{Z}^g$. En effet on a $\mathrm{ord}_v(q(m,m)t^m) = (1/2){}^t mQm + {}^t mf = (1/2)\{||f+Qm||_Q^2 - ||f||_Q^2\}$. Ainsi, si l'on note F_Q le domaine fondamental naturel de L_Q par rapport à $||\cdot||_Q$ et si $f = \mathrm{ord}_v(t) \in F_Q$ on a: $\mathrm{ord}_v(q(m,m)t^m) \geq 0$ et donc $\mathrm{ord}_v(\Theta(t,q)) \geq 0$ et même, si f est dans l'intérieur de F_Q et $m \neq 0$, on a $\mathrm{ord}_v(q(m,m)t^m) > 0$ et donc $\mathrm{ord}_v(\Theta(t,q)) = 0$. Pour tout $t \in (K_v^*)^g$, choisissons $t_0 \in t\Omega$ tel que $f = f(t_0)$ soit dans $\{\mathrm{ord}_v(t) + Q\mathbf{Z}^g\} \cup F_Q$. On observe que $\mathrm{ord}_v(\Theta(t_0,q))$ est nul en moyenne sur les points de torsion (qui sont presque tous avec des représentants f dans l'intérieur de F_Q) et que $||f||_Q$ ne dépend que de $t \bmod \Omega U_v^g$ (où $U_v =$ unités v-adiques $= \{x \in K_v^* \text{ t. q. } |x|_v = 1\}$) or on sait que:

$$(K_v^*)^g / \Omega U_v^g \cong \mathcal{A}_v / \mathcal{A}_v^0 = \Phi_v. \tag{3.9}$$

On peut donc identifier $i_v(D,P) = \mathrm{ord}_v(\Theta(t_0,q))$ (si $D = \mathrm{div}(Q)$ et P a pour paramètre bien choisi t_0) et $(1/2){}^t f Q^{-1} f \log N(v) + \kappa = B_{D,v}(j_v(P))$. Par conséquent : $\kappa = (-1/2)\int_{F_Q} ||f||_Q^2 d\mu(f)$ et l'on a démontré:

Théorème C. *Soit $u : (K_v^*)^g \to A(K_v)$ l'uniformisation rigide de $A(K_v)$, soit $\Omega = q^{\mathbf{Z}^g}$ le réseau des périodes, soit D le diviseur de la fonction $\Theta(.,q)$ et soit $P \in A(K_v) \setminus |D|$, notons t un paramètre de P dans $(K_v^*)^g$ et $f = \mathrm{ord}_v(t)$ alors :*

(1) $\Lambda_{D,v}(P) := \left\{\mathrm{ord}_v(\Theta(t,q)) + (1/2)||f||_Q^2 - (1/2)\int_{F_Q} ||f||_Q^2 d\mu(f)\right\} \log N(v)$

(2) De plus on les deux formules:

$$i_v(D,P) = max_{u(t)=P}\, \mathrm{ord}_v(\Theta(t,q)) \tag{3.10}$$

et

$$B_{D,v}(j_v(P)) = (1/2) \inf_{m\in\mathbf{Z}^g} ||f+m||_Q^2 - (1/2)\int_{F_Q} ||f||_Q^2 d\mu(f) \tag{3.11}$$

Remarques: La fonction B_v est, comme promis ou suggéré, une fonction de Bernoulli généralisée: posons pour abréger $c_Q := -\int_{F_Q} ||f||_Q^2 d\mu(f)$ et $B_Q(x) = \inf_{m\in\mathbf{Z}^g} {}^t(x+m)Q(x+m) - c_Q$; alors le membre de droite de (3.9) s'écrit $(1/2)B_Q(Q^{-1}f)$ et dans le cas $g=1$ on retrouve la fonction de Bernoulli donnée par Tate et Néron (mais translatée par $1/2$ à cause du choix de caractéristique), en effet: $B(x) = \text{distance}\,(x+1/2, \mathbf{Z})^2 - 1/12 = x^2 - x + 1/6$, si $0 \leq x \leq 1$. En général un diviseur non symétrique aura en plus un terme linéaire. Le fait que les multiplicités d'intersection puissent être calculées dans certains cas par l'ordre de valeurs de fonctions thêta apparaît déjà dans [Tu].

D) Réduction mixte. Nous supposons ici que la composante neutre $\mathcal{A}_v^0$ est extension d'une variété abélienne $\mathcal{C}_v$ de dimension $g-r$ par un tore déployé $\mathbf{G}_m^r$. Rappelons que cette hypothèse simplificatrice est toujours vérifiée après éventuellement une extension finie du corps K. On a alors une suite exacte:

$$0 \to \mathbf{G}_m^r \to \mathcal{A}_v^0 \to \mathcal{C}_v \to 0 \tag{3.12}$$

et on sait construire une uniformisation de Raynaud ([Ra1], [B-L1],[B-L2]):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & M & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & T = \mathbf{G}_m^r & \to & G & \to & C & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & A & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

où C est une variété abélienne ayant pour réduction $\bmod v$ la variété $\mathcal{C}_v$ et où M est un réseau au sens défini plus loin. L'existence et les propriétés d'une telle extension G sont énoncées dans [Ra1], la preuve apparaît dans [B-L1] et [B-L2] (quelque vingt ans après!). J'ai trouvé utile la description très concrète de G donnée dans [Re-VdP] et signale aussi une description spécifique au cas des jacobiennes dans [Fr-VdP].

Si on note $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de T, l'extension G est décrite par un homomorphisme $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}^0(C)$; soit D le diviseur que l'on veut étudier, alors il existe une fonction Θ méromorphe sur G (une fonction thêta généralisée) et un diviseur E sur C tel que :

$$q^*(D) = (\Theta) + \pi^* E \tag{3.13}$$

De plus si on définit $\Phi_E : C \to \mathrm{Pic}^0(C)$ par $c \mapsto t_c^* E - E$ alors il existe un homomorphisme $\phi : M \to X(T)$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{q}{\to} & C \\ \phi\downarrow & & \downarrow \Phi_E \\ X(T) & \stackrel{\tau}{\to} & \mathrm{Pic}^0(C) \end{array}$$

De plus, pour chaque $m \in M$ il existe une fonction rationnelle h_m telle que

$$\forall t \in T, \quad h_m(tg) = \phi(m)(t) h_m(g) \tag{3.14}$$

et telle que la fonction Θ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$h_m(g)\Theta(mg) = \Theta(g) \tag{3.15}$$

La fonction Θ admet un développement en série (dit de Fourier-Jacobi):

$$\Theta = \sum_{x \in X(T)} \Theta_x \tag{3.16}$$

avec, pour $x \in X(T)$ et $t \in T$, l'égalité $\Theta_x(tg) = x(t)\Theta_x(g)$.

Remarque: on a donc $h_m(g)\Theta_x(mg) = \Theta_{x+\phi(m)}(g)$. Le fait que M soit un réseau signifie que l'image de M par:

$$\ell : G(K_v) \to G(K_v)/G(O_v) \cong T(K_v)/T(O_v) \cong \mathrm{Hom}(X(T), K_v^*/O_v^*) \stackrel{-\log|\cdot|_v}{\to} \mathrm{Hom}(X(T), \mathbf{R})$$

est un réseau usuel dans $\mathrm{Hom}(X(T), \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^r$; la notation un peu abusive $G(O_v)$ désigne les points "entiers" de G: les points entiers de C sont ses points rationnels (C étant projective) et les points entiers de T sont les points de $U_v^r = (O_v^*)^r$ et les points entiers de G sont les points obtenus à partir des précédents (une définition plus intrinsèque est: $G(O_v)$ est le sous-groupe rigide ouvert de $G(K_v)$ obtenu par complétion formelle de $\mathcal{A}^0$ le long de sa fibre spéciale); ce sont aussi les points qui rencontre la fibre spéciale en sa composante neutre, ce qui permet d'identifier le groupe des composantes comme en (3.9):

$$\Phi_v = \mathcal{A}_v/\mathcal{A}_v^0 \cong G(K_v)/MG(O_v) \tag{3.17}$$

Les relations de périodes de Riemann se formulent alors en disant que la forme bilinéaire $M \times M \to \mathbf{R}$ donné par $(m_1, m_2) \to < m_1, m_2 > := \ell(m_1)(\phi(m_2))$ est symétrique définie positive (si le diviseur D est ample bien sûr). Nanti de cette description on peut trouver la fonction de Néron ainsi: D'après (3.13) la fonction $-\log|\Theta(g)|_v + \Lambda_{E,v}(\pi(g))$ possède la même singularité logarithmique que $\Lambda_{D,v}(q(g))$; de plus des considérations utilisant le théorème du cube (1.7) montrent que la différence entre ces deux fonctions, qui est donc continue, doit être une fonction de degré deux, c'est-à-dire quadratique + linéaire + constante; ainsi on a :

$$\Lambda_{D,v}(q(g)) = -\log|\Theta(g)|_v + \Lambda_{E,v}(\pi(g)) + H(g,g) + J(g) + \kappa \tag{3.18}$$

avec J linéaire et H bilinéaire symétrique que nous allons déterminer. En effet:

$$0 = \Lambda_{D,v}(q(gmt)) - \Lambda_{D,v}(q(gt)) + \Lambda_{D,v}(q(g)) - \Lambda_{D,v}(q(gm)) = +\log|h_m(tg)/hm(g)|_v + 2H(t,m) =$$

$= +\log|\phi(m)(t)| + 2H(t,m)$.
Cette relation détermine H sur $M \times T$; plus précisément $H : T \times M \to \mathbf{R}$ est donnée par $(t,m) \mapsto (-1/2)\log|f(m)(t)|_v$ et le lemme suivant montre que H est entièrement déterminée par ses valeurs sur $M \times T$:

Lemme 3.3. *Il existe une unique application bilinéaire symétrique et continue $H : G \times G \to \mathbf{R}$ telle que pour $(m,t) \in M \times T$ on ait :*

$$H(m,t) = (-1/2)\log|\phi(m)(t)|_v.$$

L'unicité est immédiate si l'on utilise que G/T est compact; l'existence découle bien sûr de l'existence des hauteurs locales de Néron mais on peut aussi décrire plus explicitement H; tout d'abord l'application H de $T \times M$ dans R passe au quotient en une application de $T(K_v)/T(O_v) \times M$ dans $\mathbf{R}$, puis en utilisant $G(K_v) \to G(K_v)/G(O_v) \cong T(K_v)/T(O_v)$ on obtient $H : G \times M \to \mathbf{R}$ avec $H(m_1, m_2) = (1/2) < m_1, m_2 >$ qui est symétrique en particulier $G(O_v)$ est dans le noyau de H et la fonction β définie par:

$$\beta(g) := \min_{m \in M} H(mg, mg) \tag{3.18}$$

est invariante par M et $G(O_v)$ et définit donc une fonction sur $\Phi_v = G(K_v)/MG(O_v)$.

Déterminer J est plus délicat car J dépend du choix de E et Θ dans l'équation (3.13). Pour décrire J il nous faut revenir sur le choix de Θ et E. Bien sûr on peut remplacer E par $E' = E - (h)$ et (Θ) par $(\Theta') = (\Theta.h \circ \pi)$ et le diviseur de Θ ne bouge pas si l'on remplace Θ par $c\gamma\Theta$ où c est une constante et γ est un élément de $\operatorname{Ker}\tau \subset X(T)$ vu comme fonction sur G.

Rappelons la décomposition évidente d'un diviseur D en somme de diviseurs symétrique et antisymétrique: $2D = ([-1]^*D + D) + (D - [-1]^*D)$ et décidons d'appeler *complètement symétrique* (resp. *complètement antisymétrique*) un diviseur D de la forme $[-1]^*D' + D'$ (resp. de la forme $[-1]^*D' - D'$).

Lemme 3.4. *Si D est complètement symétrique, on peut décomposer $q^*(D) = (\Theta) + \pi^*E$ avec E complètement symétrique sur C de sorte que la fonction linéaire J dans la formule* (3.17) *soit nulle. Si D est complètement antisymétrique alors H est nulle, on peut décomposer $q^*(D) = (\Theta) + \pi^*E$ avec Θ vérifiant $\Theta(-g) = \Theta(g)^{-1}$ et E complètement antisymétrique; avec ces choix la constante κ est nulle et J est déterminée par ses valeurs sur M, c'est-à-dire $J(m) = -\log|h_m(g)|_v - \Lambda_{E,v}(\pi(mg)) + \Lambda_{E,v}(\pi(g))$ (qui est indépendant de g).*

Si $D = D' + [-1]^*D'$ et $q^*(D') = (\Theta') + \pi^*E'$ alors $q^*(D) = (\Theta) + \pi^*E$ avec $E = E' + [-1]^*E'$ et $\Theta(g) = \Theta'(g)\Theta'(-g)$. On voit donc que $\Lambda_{D,v} \circ [-1] = \Lambda_{D,v}$ et $L_{E,v} \circ [-1] = \Lambda_{E,v}$ et $\Theta(g) = \Theta(-g)$; comme bien sûr $H(-g,-g) = H(g,g)$ on obtient $J(g) = J(-g)$ et donc $J = 0$. Si $D = D' - [-1]^*D'$ et $q^*(D') = (\Theta') + \pi^*E'$ alors $q^*(D) = (\Theta) + \pi^*E$ avec $E = E' - [-1]^*E'$ et $\Theta(g) = \Theta'(g)\Theta'(-g)^{-1}$. On voit donc que $\Lambda_{D,v} \circ [-1] = -\Lambda_{D,v}$ et $\Lambda_{E,v} \circ [-1] = -\Lambda_{E,v}$ et $\Theta(g) = \Theta(-g)^{-1}$; on en déduit $2H(g,g) + 2\kappa = 0$, donc H et κ sont nulles. Ensuite $0 = \Lambda_{D,v}(gm) - \Lambda_{D,v}(g) = +\log|h_m(g)|_v + \Lambda_{E,v}(\pi(mg)) - \Lambda_{E,v}(\pi(g)) + J(m)$. Comme $\Phi_E = 0$ on a aussi $\phi = 0$ et donc $h_m(tg) = h_m(g)$ et si l'on voit h_m comme une fonction sur C on a $-(h_m) - t^*_{\pi(m)}(E) + E = 0$, ce qui explique que la formule donné pour $J(m)$ soit indépendante de g.

Remarque: soit D ample complètement symétrique et soit $q(b) = a$ et $D' = t_a^*D$, alors on a clairement:

$$\Lambda_{D',v}(q(g)) = \Lambda_{D,v}(q(gb)) + \kappa' = -\log|\Theta(gb)|_v + \Lambda_{E,v}(\pi(gb)) + H(g,g) + 2H(b,g) + \kappa$$

et, dans ce cas, la fonction "J" n'est pas nulle.

Par un argument analogue au paragraphe précédent (cas de réduction torique) mais utilisant cette fois le développement en série de Fourier-Jacobi (3.16), on voit qu'il existe une constante $c \in K_v^*$ telle que $\gamma(q(g)) := \max_{m \in M}\{\operatorname{ord}_v(c\Theta(mg)) + i_v(E, \pi(g))\}$ soit ≥ 0 et de plus ait une moyenne sur les points de N-torsion tendant vers 0. Par commodité décidons d'appeler *ajustée* une fonction Θ telle que l'on puisse prendre $c = 1$; par exemple si $\Theta(g) = \Theta(-g)^{-1}$ alors Θ est ajustée. Appelons $f := \ell(g) \in \operatorname{Hom}(X(T), \mathbf{R})$ et notons encore H la forme bilinéaire symétrique induite par H sur $\operatorname{Hom}(X(T), \mathbf{R})$ et F_H le domaine fondamental naturel du réseau $\ell(M)$ par rapport à la forme H; ainsi $\beta(g) := \min_{m\in M} H(mg, mg)$ est égal à $H(g, g)$ (ou encore à $H(f, f)$) si et seulement si $f \in F_H$. On a donc démontré:

Théorème D. *Soit $P = q(g) \in A(K_v)$, soit D un diviseur sur A, alors*

(a) Si D est complètement symétrique, avec les notations précédentes :

$$\Lambda_{D,v}(P) = -\log|\Theta(g)|_v + \Lambda_{E,v}(\pi(g)) + H(g, g) + \kappa.$$

Si l'on a ajusté la fonction Θ on a de plus $i_v(D, P) = \max_{q(g)=P}\{ord_v(Q(g) + i_v(E, \pi(g))\}$ et

$$\log N(v) B_{D,v}(j_v(P) = \inf_{q(g)=P} H(g, g) - c_H$$

où $c_H := \int_{F_H} H(f, f)d\mu(f) = -\kappa$.

(b) Si D est complètement antisymétrique, alors avec les notations précédentes :

$$\Lambda_{D,v}(P) = -\log|\Theta(g)|_v + \Lambda_{E,v}(\pi(g)) + J(g)$$

où J est donnée par la formule du lemme, et on a

$$i_v(D, P) = \max_{q(g)=P}\{\mathrm{ord}_v(\Theta(g) + i_v(E, \pi(g))\} \quad \text{et} \quad \log N(v) B_{D,v}(j_v(P) = \inf_{q(g)=P} J(g).$$

Remarques: 1) On observe que dans tous les cas, si v est nonarchimédienne la hauteur locale est donnée par un terme positif (une multiplicité d'intersection) plus un terme correctif correspondant à la mauvaise réduction du type "fonction de Bernoulli généralisée" (i.e. de la forme $B_Q(x) := \inf_{m\in M} Q(x+m) - c_Q$ pour une forme quadratique Q et un réseau M).
2) Les formules des théorèmes A,B,C,D décrivent les hauteurs locales comme somme d'une multiplicité d'intersection correspondant à la partie de A ayant bonne réduction et d'une valeur de fonction theta v-adique corrigée par un facteur quadratique pour être périodique correspondant à la partie de A ayant mauvaise réduction ; dans ce langage il faut comprendre les places archimédiennes comme étant des places de mauvaise réduction.

4. HAUTEURS D'ARAKELOV, THÉOREME DU CUBE.

Ce paragraphe m'a été suggéré par des discussions avec Bost. La théorie d'Arakelov suggère de définir les hauteurs de la manière suivante (Cf [Sz]): soit D diviseur sur X, on choisit un modèle sur $R = \mathrm{spec}(O_k)$ (régulier si on peut) $\mathcal{X}$ de X et une extension $\mathcal{D}$ de D; a priori on peut prendre la clôture schématique de D dans $\mathcal{X}$, mais on peut aussi ajouter des composantes de fibres spéciales. Enfin on choisit pour chaque place archimédienne une métrique sur le fibré $\mathcal{O}(D)$ ou une fonction de Green associée à D (la relation étant que pour une section s ayant pour diviseur D on a $g_D = -\log ||s||^2$). On peut alors définir :

$$\begin{aligned}[K:\mathbf{Q}]h_{\mathcal{X},\mathcal{D},||\cdot||}(P) := \deg_{\mathrm{Ar}} P^*\mathcal{O}(\mathcal{D}) &:= \log \mathrm{card}(O_K/s(P)O_K) - \sum_v d_v \log ||s(P)||_v \\ &= \log \mathrm{Norme}\, P^*(\mathcal{D}) + (1/2)\sum_v d_v g_{D,v}(P).\end{aligned}$$

On sait que la fonction ainsi définie est une hauteur de Weil pour le diviseur D; si on se place dans le cadre des variétés abéliennes et que l'on veut obtenir la hauteur de Néron-Tate associée à D sur A, il est naturel de choisir comme modèle celui de Néron $\mathcal{A}$ et pour $g_{D,v}$ notre fonction $\Lambda_{D,v}$ (multipliée par 2); mais l'on voit que l'on n'obtiendra la hauteur de Néron-Tate que si l'on choisit :

$$\mathcal{D} := \overline{D} + \sum_v \sum_{j\in\Phi_v} B_{D,v}(j)\mathcal{A}_{v,j} \tag{4.1}$$

où $\overline{D}$ désigne la clôture schématique de D dans $\mathcal{A}$ et $\{\mathcal{A}_{v,j}\}_{j\in\Phi_v}$ désigne l'ensemble des composantes de la fibre spéciale au dessus de v. On voit que en général $\mathcal{D}$ n'appartient pas à $\mathrm{Pic}(\mathcal{A})$ mais à $\mathrm{Pic}(\mathcal{A})\otimes\mathbf{Q}$ ou plus précisément à (1/N)Pic($\mathcal{A}$) avec $N = 2\times$ (exposant du groupe Φ_v). Ceci est à rapprocher d'un théorème de Moret-Bailly [M-B] affirmant qu'un faisceau inversible L sur A n'admet pas toujours un prolongement $\mathcal{L}$ à $\mathcal{A}$ vérifiant encore le théorème du cube (c'est-à-dire comme en (1.7): $\sum_I(-1)^{\mathrm{card}(I)}s_I^*(\mathcal{L})$ est trivial). Moret-Bailly prouve par contre qu'une puissance convenable $L^{\otimes N}$ admet toujours un tel prolongement $\mathcal{M}$ et qu'alors $(1/N)h_{\mathcal{M}}(P)$ est la hauteur de Néron-Tate associée à L (à une constante près); de plus l'obstruction à l'extension de la structure du cube est mesurée par une application “pointée de degré deux” $d:\Phi_v\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. L'interprétation de ces résultats dans notre langage est aisée: le prolongement de $L^N=\mathcal{O}(ND)$ n'est autre que $\mathcal{O}(N\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est défini par (4.1) et l'application d est définie par $d(j):=B_{D,v}(j)-B_{D,v}(0)\bmod\mathbf{Z}$. On obtient ainsi une version tout-à-fait explicite du résultat de Moret-Bailly; il me semble que cela méritait d'être signalé.

5. ANALOGUES SUR LES CORPS DE FONCTIONS.

Dans ce paragraphe, je décris très succintement et sans preuves ce qui se passe si on remplace corps de nombres par corps de fonctions. Soit donc une variété abélienne A définie sur un corps de fonction $K=k(C)$ où C est une courbe lisse projective définie sur k; pour simplifier je supposerai que k est algébriquement clos (on pourrait bien sûr se passer de cette hypothèse). La théorie précédente se transpose aisément: le modèle de Néron $p:\mathcal{A}\to C$ existe toujours et les complications dues aux places archimédiennes disparaissent. Si D est un diviseur, disons complètement symétrique pour fixer les idées, sur A, notons $\overline{D}$ l'adhérence de D dans $\mathcal{A}$; on a alors pour toute place v de C et tout point P de $A(K)\setminus|D|$ (vu également comme une section de p) la formule $\Lambda_{D,v}(P)=i_v(\overline{D},P)+B_{D,v}(j_v(P))$ et donc $\hat{h}_D(P)=(\overline{D}.P)+\sum_{v\in S}B_{D,v}(j_v(P))$ où le premier terme est le nombre d'intersection de $\overline{D}$ et la section P (soit encore $\deg(P^*(\overline{D}))$) et où S désigne l'ensemble des mauvaises places, $j_v(P)$ la composante de la fibre spéciale au dessus de v que P rencontre et $B_{D,v}$ la fonction de Bernouilli généralisée associée à la forme de Riemann rigide (comme au paragraphe 3). En particulier, si $\mathcal{A}^0(K)$ désigne le sous-groupe de $A(K)$ formé des points rencontrant en toute place la composante neutre de $\mathcal{A}$ et si $P\in\mathcal{A}^0(K)$ alors $\hat{h}_D(P)=(\overline{D}.P)+\delta$ avec $\delta=\sum_{v\in S}B_{D,v}(j_v(0))=-(\overline{D}.0)$. Il est intéressant d'observer que pour une courbe elliptique et pour $D=(0)$ les calculs de Tate décrits au premier paragraphe donne $\delta=(1/12)\deg\mathrm{Disc}(A/K)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[Ar] S.J. Arakelov: *Intersection theory on an arithmetic surface* (traduit du russe). Izv.Akad.Nauk.38, 1974, 1179–92

[B-L-R] S. Bosch; W. Lütkebohmert; M.Raynaud: *Néron models.* Springer 1991.

[B-L1] S. Bosch; W. Lütkebohmert: *Stable reduction and uniformisation of abelian varieties II.* Invent.Math. 78, 1984, 257–97.

[B-L2] S. Bosch; W. Lütkebohmert: *Degenerating abelian varieties.* Topology 29, 1990, 653–698.

[Bo] J-B. Bost: *Fonction de Green-Arakelov, fonction thêta et courbes de genre 2.* C.R.A.S. 305 I, 1987, 643–46.

[Fa1] G. Faltings: *Calculus on arithmetic surfaces.* Annals of maths 119, 1984, 387–424.

[Fr] E. Freitag: *Siegelsche Modulfunktionen.* Springer 1983.

[Fr-VdP] J. Fresnel; M. Van der Put: *Uniformisation de variétés abéliennes.* Annales Fac. Sci. Toulouse, numéro spécial centenaire, 1989, 7–42.

[Ge] L. Gerritzen: *On the non archimedean representation of abelian varieties.* Math. Ann., 169, 1972, 323–46.

[G-S1] H. Gillet; C. Soulé: I*ntersections sur les variétés d'Arakelov.* CRAS 299, 1984, 563–66.

[G-S2] H. Gillet; C. Soulé: *Arithmetic intersection theory.* Pub. Math. IHÉS 72, 1990, 93–174.

[Hi] M. Hindry: *Autour d'une conjecture de Serge Lang.* Invent.Math.94, 1988, 575–603.

[Hi-Si] M. Hindry; J.H. Silverman: *The canonical height and integral points on elliptic curves.* Invent. Math.93, 1988, 419–450.

[Ig] J. Igusa: *Theta functions.* Springer 1972.

[Ka] E. Kani: *Weil heights, Néron pairings and v-metrics on curves.* Rocky mountain J. 15, 1985, 417–49.

[La1] S. Lang: *Fundamentals of diophantine geometry.* Springer 1983.

[La2] S. Lang: *Elliptic curves and diophantine analysis.* Springer 1977.

[M-B] L. Moret-Bailly: *Pinceaux de variétés abéliennes.* Astérisque 129, 1985.

[Mo] H. Morikawa: *Theta function and abelian varieties over valuation fields of rank one.* Nagoya Math. J. 20, 1962, 1–27 (et aussi 21, 1962, 231–250)

[Mu1] D. Mumford: *Abelian varieties.* Oxford University Press 1970.

[Mu2] D. Mumford: *Geometric invariant theory.* Springer 1965.

[Mu3] D. Mumford: *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings.* Comp. Math. 24, 1972, 239–272.

[Né1] A.Néron : *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes.* Annals of Math. 82, 1965, 249–331.

[Né2] A. Néron : *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux.* Pub. Math IHÉS 21, 1964, 361–482.

[Ra1] M. Raynaud: *Variétés abéliennes et géométrie rigide.* Actes congrès inter. Math., t1, 1970, 473–77.

[Ra2] M. Raynaud: *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et espaces homogènes.* Lecture Notes 119, Springer 1970.

[Ra3] M. Raynaud: *Sous-variété d'une variété abélienne et points de torsion.* Arithmetic and geometry (dédié à Shafarevich) Vol.1, 327–352, Birkhäuser 1983.

[Re-VdP] M. Reversat; M. Van der Put: *Construction analytique rigide de variétés abéliennes.* Bulletin de la SMF 117, 1989, 415–44.

[Ru] R. Rumely: *Capacity theory on algebraic curves.* Springer, 1989, Lecture Notes 1378.

[Se] J-P. Serre: *Lectures on the Mordell-Weil theorem.* Vieweg 1989.

[Si] J.H. Silverman: *Lower bounds for the canonical height on elliptic curves.* Duke Math. J. 48, 1981, 633–48.

[Sz] L. Szpiro: *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques, la conjecture de Mordell.* Astérisque, 127, 1985.

[Ta1] J. Tate: *Lettre à Serre* (juin 68).

[Ta2] J. Tate: *Rigid analytic spaces.* Invent. Math. 12, 1971, 257–289

[Tu] S.Turner: *non archimedean theta functions and Néron symbols.* Journal of number theory 21, 1985, 1–16.

Références ajoutées ultérieurement:

[We1] A. Werner: *Local heights on abelian varieties with split multiplicative reduction.* Compositio Math. 107 (1997), 289–317.

[We2] A. Werner: *Local heights on abelian varieties and rigid analytic uniformization.* Doc. Math. 3 (1998), 301–319.

Appendice A. Hauteurs d'Arakelov et théorème du cube

Le texte précédent propose une normalisation des hauteurs locales de Néron $\Lambda_{D,v}$ *en imposant que la moyenne asymptotique sur les points de torsion soit nulle (normalisation (N1) et (N2)). On a alors (Cf. formule (2.3) du texte cité):*

$$\hat{h}_D(P) = [K : \mathbf{Q}]^{-1} \sum_v d_v \Lambda_{D,v}(P) + \kappa(A, D).$$

Comme on a pour tout point de torsion $\hat{h}_D(P) = 0$, *on pourrait penser que*

$$\kappa(A, D)?$$

Cela est vrai pour A *une courbe elliptique et* $D = (0)$, *mais nous allons voir, dans le théorème principal de cet appendice, que cela est faux en dimension supérieure, au moins pour les variétés abéliennes ayant bonne réduction partout. On montre en effet que, lorsque* D *est le diviseur associé à une polarisation principale,* $\kappa(A, D)$ *s'exprime à l'aide de la hauteur canonique, appelée aussi hauteur de Philippon, du diviseur. Or cette dernière n'est nulle que si* D *est un translaté de sous-variété abélienne, ce qui est vrai lorsque* A *une courbe elliptique et* $D = (0)$, *mais est faux lorsque* D *est ample sur une variété abélienne de dimension* ≥ 2.

Supposons d'abord, pour simplifier que $f : \mathcal{A} \to R = \mathrm{spec}(\mathcal{O}_K)$ est un schéma abélien (i. e. A possède bonne réduction partout). Pour Θ diviseur ample symétrique induisant une polarisation principale, notons $\mathcal{O}(\Theta)$ le fibré en droites associé sur $\mathcal{A}$ et s_Θ la section canonique. On choisit une métrique $||\cdot||$ sur $\mathcal{O}(\Theta)$ proportionnelle à $\exp(-\Lambda_{\Theta,v})$ mais telle que :

$$\int_{A_v(\mathbf{C})} ||s_\Theta||^2 = 1 \qquad (A.1)$$

Explicitement (Cf Chai-Faltings [C-F] et Moret-Bailly [M-B2])

$$||s_\Theta\,(z \bmod L_\tau)\,|| = \det(2\,\mathrm{Im}\,\tau)^{1/4}\,|\Theta(z,\tau)|\exp\left(-\pi^t\,\mathrm{Im}\,z(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}\,\mathrm{Im}\,z\right)$$

On pose

$$R(A(\mathbf{C})) = -\int_{A(\mathbf{C})} \log ||s_\Theta|| dm \qquad (A.2)$$

Remarquons que si un fibré $\mathcal{L}$ vérifie

$$s_{123}^*\mathcal{L} \otimes s_{12}^*\mathcal{L}^{-1} \otimes s_{13}^*\mathcal{L}^{-1} \otimes s_{23}^*\mathcal{L}^{-1} \otimes s_1^*\mathcal{L} \otimes s_2^*\mathcal{L} \otimes s_3^*\mathcal{L} \otimes \cong \mathcal{O}_{\mathcal{A}^3}$$

alors $e^*\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_R$; de plus le premier isomorphisme est isométrique si et seulement le second l'est.

D'après Moret-Bailly [M-B2], on obtient pour un fibré métrisé vérifiant le théorème du cube métrique :

$$h_\mathcal{L}(P) = \hat{h}_\mathcal{L}(P)$$

Si $f : \mathcal{A} \to R$ est un schéma abélien alors

$$\bar{\mathcal{L}} := \overline{\mathcal{O}(\Theta)} \otimes f^*e^*\left(\overline{\mathcal{O}(\Theta)}\right)^{-1} \qquad (A.4)$$

est métrisé rigidifié (ici $\overline{\mathcal{O}(\Theta)}$ désigne $\mathcal{O}(\Theta)$ avec sa métrique $(A.1)$). Ainsi on obtient

$$[K : \mathbf{Q}]\hat{h}_\Theta(P) = \deg_{\mathrm{Ar}} P^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)} - \deg_{\mathrm{Ar}} e^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)} \qquad (A.5)$$

On veut donc interpréter l'invariant

$$\delta(A, \Theta) := \deg_{\mathrm{Ar}} e^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)} \qquad (A.6)$$

En fait, d'après Moret-Bailly et la "formule-clé" (voir [M-B]), cet invariant n'est autre que $[K:\mathbf{Q}]$ fois la hauteur modulaire de la variété abélienne. Plus précisément, si l'on munit $H^0(A(\mathbf{C}),\Omega^g)$ de la norme

$$||\omega||^2 = i^g(-1)^{g(g-1)/2}(2\pi)^{2g}\int_{A(\mathbf{C})}\omega\wedge\bar{\omega}$$

alors

$$\delta(A,\Theta) = \frac{1}{2}\deg_{\mathrm{Ar}} e^*\left(\Omega^g_{\mathcal{A}/R}, ||\cdot||\right) = \frac{[K:\mathbf{Q}]}{2}h(A/K) \tag{A.7}$$

Remarque : les constantes changent selon les auteurs; celles choisies ici permettent par exemple d'avoir $h(A/K)\geq 0$.

Pour "calculer" d'une autre façon $\delta(A,\Theta)$ on va utiliser la théorie de l'intersection arithmétique (Voir Gillet-Soulé [G-S], Bost-Gillet-Soulé [B-G-S]). A un fibré métrisé $\bar{\mathcal{L}}$ (muni d'une section rationnelle s) on associe classiquement une forme de Chern

$$c_1(\bar{\mathcal{L}}) := -dd^c\log||s||^2+\delta_{\mathrm{div}(s)}$$

et, un peu moins classiquement une classe de Chern arithmétique :

$$\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}) := \text{classe de } (\mathrm{div}(s), -\log||s||^2).$$

ces classes sont fonctorielles au sens que, par exemple, si on calcule pour le fibré défini par $(A.4)$, on obtient :

$$\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}) = \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(\Theta)}) - f^*\hat{c}_1(e^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)}) \tag{A.8}$$

En appliquant la théorie de l'intersection (sans problème de références fantomes puisqu'on suppose pour le moment $f:\mathcal{A}\to R$ propre), on obtient :

$$\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}})^r = \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(\Theta)})^r - r\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(\Theta)})^{r-1}\cdot f^*\hat{c}_1(e^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)}) \tag{A.9}$$

(appliquer la formule du binôme et le fait que $\hat{c}_1(e^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)})$ vit sur R qui est de dimension un, donc est nul au carré).

L'intérêt de ce calcul est clair si l'on utilise la définition de Faltings, Gillet-Soulé de hauteur d'un cycle algébrique (Cf. [Fa2], [B-G-S]).

Définition. Soit Y un cycle algébrique de dimension r, on pose

$$[K:\mathbf{Q}]h_{\bar{\mathcal{L}}}(Y) := \deg_{\mathrm{Ar}}\left(\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}})^r\cdot Y\right)$$

En appliquant cela à notre $\bar{\mathcal{L}}$ et en observant que

$$\deg\left(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(\Theta)})^{r-1}\cdot f^*\hat{c}_1(e^*\overline{\mathcal{O}(\Theta)})\cdot Y\right) = \deg_\Theta Y\delta(A,\Theta) \tag{A.11}$$

où $\deg_\Theta Y$ désigne le degré d'intersection usuel dans la fibre générique (i. e. le degré du zéro-cycle $Y\cdot\Theta^{r-1}$ dans A). On obtient donc

$$[K:\mathbf{Q}]h_{\bar{\mathcal{L}}}(Y) = [K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta))}}(Y) - r\deg_\Theta Y\delta(A,\Theta) \tag{A.12}$$

par ailleurs Philippon [Ph] a introduit une hauteur des sous-variétés de A généralisant celle de Néron-Tate et caractérisée par

(i) $\left|\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(Y) - h_{\mathcal{O}(\Theta)}(Y)\right| \leq c\deg_{\Theta Y}$

(ii) $\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}([n]_*Y) = n^{2r}\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(Y)$ ou encore

$$\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}([n]Y) = \frac{n^{2r}}{|\mathrm{Ker}[n] \cap \mathrm{Stab}(Y)|}\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(Y)$$

rappelons que, si P est un point, $\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(P) = \hat{h}_\Theta(P)$, que, si Y est une sous-variété, $\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(Y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si Y est translaté d'une sous-variété abélienne par un points de torsion, et enfin que $\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}([n]^*Y) = n^{2g-2r}\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(Y)$.

Du fait que $\bar{\mathcal{L}}$ vérifie la formule du cube et donc $[n]^*\bar{\mathcal{L}} \cong \bar{\mathcal{L}}^{\otimes n^2}$, on déduit que

$$\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(Y) = h_{\bar{\mathcal{L}}}(Y)$$

Comme $\deg_\Theta A = g! = \deg_\Theta \Theta$, en appliquant $(A.12)$ successivement à $\mathcal{A}$ et Θ on obtient

$$0 = [K:\mathbf{Q}]h_{\bar{\mathcal{L}}}(A) = [K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(A) - (g+1)!\delta(A,\Theta) \tag{A.14}$$

et

$$\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(\Theta) = [K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(\Theta) - gg!\delta(A,\Theta) \tag{A.15}$$

Par ailleurs un calcul élémentaire à partir des définitions de l'intersection arithmétique (voir Faltings [Fa2] ou l'exposé de Bost au séminaire Bourbaki [Bo] page 13) on a :

$$[K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(A) = [K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(\mathrm{div}(s_\Theta) - \sum_\sigma \int_{A_\sigma(\mathbf{C})} \log||s_\Theta||c_1(\overline{\mathcal{O}(\Theta)})^g$$

soit encore

$$[K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(A) = [K:\mathbf{Q}]h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(\Theta) - g!\sum_\sigma R(A_\sigma(\mathbf{C})) \tag{A.16}$$

En combinant $(A.14)$, $(A.15)$ et $(A.16)$, on obtient :

$$\delta(A,\Theta) = \frac{[K:\mathbf{Q}]}{g!}\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(\Theta) + \sum_\sigma R(A_\sigma(\mathbf{C})) \tag{A.17}$$

On en tire un calcul de la hauteur modulaire de A en terme de la hauteur de Philippon d'un diviseur représentant la polarisation principale (ce calcul est dû essentiellement à Bost) et, pour notre hauteur de Néron-Tate :

$$\hat{h}_\Theta(P) = h_{\overline{\mathcal{O}(\Theta)}}(P) - \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_\sigma R(A_\sigma(\mathbf{C})) - \frac{1}{g!}\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(\Theta) \tag{A.18}$$

Comme les deux premiers termes du membre de droite de $(A.18)$ représentent exactement la somme de nos hauteurs normalisées, on a prouvé :

Théorème. *Soit (A,Θ) une variété abélienne principalement polarisée. Supposons que A ait bonne réduction partout sur K. Soit $P \in A(K)$, non situé sur le diviseur Θ, alors*

$$\hat{h}_\Theta(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{v\in M_K} d_v\Lambda_{\Theta,v}(P) - \frac{1}{g!}\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(\Theta), \tag{A.19}$$

où $\hat{h}_{\mathrm{Ph},\Theta}(\Theta)$ est la hauteur de Philippon de l'hypersurface Θ, relative au fibré associé à Θ.

On aimerait étendre le théorème précédent au cas général, mais une telle généralisation présente des obstacles techniques, dus principalement au fait que le modèle de Néron n'est plus propre sur la base et la théorie de l'intersection arithmétique est moins précise dans ce cadre ou, à tout le moins, beaucoup plus délicate à manier. Cela semble lié à des extensions de la "formule-clé" de Moret-Bailly.

BIBLIOGRAPHIE POUR L'APPENDICE.

[Bo] J-B. Bost: *Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/91. Astérisque No. 201-203 (1991), Exp. No. 731, 43–88 (1992).

[B-G-S] J-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé: *Heights of projective varieties and positive Green forms.* J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), 903–1027.

[C-F] C-L Chai, G. Faltings: *Degeneration of abelian varieties.* With an appendix by David Mumford. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 22. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Fa2] G. Faltings: *Diophantine approximation on abelian varieties.* Ann. of Math. 133 (1991), 549–576.

[G-S] H. Gillet, C. Soulé: *An arithmetic Riemann-Roch theorem.* Invent. Math. 110 (1992), 473–543.

[M-B2] Moret-Bailly: *Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann.* Compositio Math. 75 (1990), 203–217.

[Ph] P. Philippon: *Sur des hauteurs alternatives. I.* Math. Ann. 289 (1991), 255–283.