

**Partiel du 12 novembre 2010, “Courbes et surfaces”**

(CS3, option L2 – Université Diderot Paris 7)

**Exercice 1** Existe-t-il un domaine plan d’aire 3 mètres carrés qui soit borné par une courbe de longueur égale à 6 mètres ?

**Exercice 2** La courbe plane suivante est connue sous le nom de *cardioïde* :

$$M(t) := ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t).$$

Déterminer les points où la courbe est régulière et calculer sa fonction courbure.

**Exercice 3** On définit la courbe dans l’espace  $M : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbf{R}^3$  :

$$M(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

Déterminer les points où elle est régulière, birégulière, calculer le trièdre de Frenet “ $T, N, B$ ” ainsi que sa courbure et sa torsion. [On pourra commencer par vérifier si la courbe est paramétrée par sa longueur]

**Exercice 4** Soit  $C$  une courbe simple fermée, paramétrée par sa longueur  $M : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}^2$  ; on note  $M(s) = (x(s), y(s))$  et on suppose  $M$  est régulière de classe  $\mathcal{C}^3$  ; on note  $\kappa(s)$  sa courbure.

1. Vérifier que  $x'' = -\kappa y'$  et  $y'' = \kappa x'$ .
2. Montrer que  $\int_0^L x(s)\kappa'(s)ds = -\int_0^L \kappa(s)x'(s)ds$  ; énoncer et démontrer une formule analogue avec  $y(s)$ .
3. En déduire que, pour tout  $a, b, c \in \mathbf{R}$  on a

$$\int_0^L (ax + by + c)\kappa'(s)ds = 0.$$

4. Montrer que  $\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi$ . [On pourra utiliser l’interprétation de  $\kappa$  comme la variation de l’angle de la tangente.]
5. On définit la courbe “décalée d’un rayon  $r$ ” par la formule

$$M_r(s) = M(s) - rN(s).$$

Indiquer à quelle condition  $M_r$  est régulière et montrer en particulier que la condition est satisfaite pour  $r$  assez petit.

6. On suppose maintenant  $0 \leq r < 1/\max|\kappa(s)|$ . Montrer que la longueur  $L_r$  de la courbe définie par  $M_r$  et l’aire  $A_r$  du domaine délimité vérifient :

$$L_r = L + 2\pi r \quad \text{et} \quad A_r = A + rL + \pi r^2.$$