Un corrigé du partiel du 12 novembre 2010, "Courbes et surfaces"

(CS3, option L2 – Université Diderot Paris 7)

Exercice 1 *Existe-t-il un domaine plan d'aire 3 mètres carrés qui soit borné par une courbe de longueur égale à 6 mètres ?*

Solution :
Supposons qu'il existe un tel domaine. L'inégalité isopérimétrique entraînerait alors "4π Aire $\leq$ (Longueur)^2, c'est-à-dire ici $12\pi \leq 6^2 = 36$. Mais $12\pi = 12 \cdot (3,14\dots) > 36$ donc un tel domaine n'existe pas.

Exercice 2 *La courbe plane suivante est connue sous le nom de cardioïde :*

$$M(t) := ((1-\cos t)\cos t, (1-\cos t)\sin t)\,.$$

Déterminer les points où la courbe est régulière et calculer sa fonction courbure.

Solution :
On calcule $M'(t) = (-\sin t + \sin 2t, \cos t - \cos 2t)$ puis $M''(t) = (-\cos t + 2\cos 2t, -\sin t + 2\sin 2t)$. On en déduit

$$\|M'(t)\|^2 = 2 - 2\cos t.$$

Ainsi la courbe est régulière sauf aux points $t \in 2\pi\mathbf{Z}$. On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\det(M'(t), M''(t)) &= (-\sin t+\sin 2t)(-\sin t+2\sin 2t)-(\cos t-\cos 2t)(-\cos t+2\cos 2t)\\ &= 3(1-\cos t).\end{aligned}$$

On obtient ainsi le calcul de la courbure :

$$\kappa(t) = \frac{\det(M'(t), M''(t))}{\|M'(t)\|^3} = \frac{3}{2^{3/2}\sqrt{1-\cos t}}.$$

Remarque. On peut aussi calculer la longueur de la courbe

$$L := \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8.$$

Exercice 3 *On définit la courbe dans l'espace* $M : [-1/2, 1/2] \to \mathbf{R}^3$ *:*

$$M(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Déterminer les points où elle est régulière, birégulière, calculer le trièdre de Frenet " T, N, B " ainsi que sa courbure et sa torsion. [On pourra commencer par vérifier si la courbe est paramétrée par sa longueur]

Solution :
On calcule $M'(t) = \left(\frac{1}{2}(1+t)^{1/2}, -\frac{1}{2}(1-t)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ainsi on a

$$\|M'(t)\|^2 = \frac{1}{4}(1-t) + \frac{1}{4}(1+t) + \frac{1}{2} = 1.$$

La courbe est donc paramétrée par la longueur de son arc et $T = M'$. On continue le calcul des dérivées :

$$T' = M'' = \left(\frac{1}{4}(1+t)^{-1/2}, \frac{1}{4}(1-t)^{-1/2}, 0\right)$$

donc

$$\kappa = \|T'\| = \left(\frac{1}{16(1+t)} + \frac{1}{16(1-t)}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2(1-t^2)}},$$

et

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \left(\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

On peut ensuite calculer

$$B := T \wedge N = \left(-\frac{\sqrt{1+t}}{2}, \frac{\sqrt{1-t}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad B' = \left(-\frac{1}{4\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{4\sqrt{1-t}}, 0\right).$$

On peut calculer la torsion d'après la définition $B' = -\tau N$; on trouve $\tau = \frac{1}{2\sqrt{2(1-t^2)}}$.

Exercice 4 *Soit* C *une courbe simple fermée, paramétrée par sa longueur* $M : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ *; on note* $M(s) = (x(s), y(s))$ *et on suppose* M *est régulière de classe* $\mathcal{C}^3$ *; on note* $\kappa(s)$ *sa courbure.*

1. *Vérifier que* $x'' = -\kappa y'$ *et* $y'' = \kappa x'$.
2. *Montrer que* $\int_0^L x(s)\kappa'(s)ds = -\int_0^L \kappa(s)x'(s)ds$ *; énoncer et démontrer une formule analogue avec* $y(s)$.
3. *En déduire que, pour tout* $a, b, c \in \mathbf{R}$ *on a*

$$\int_0^L (ax + by + c)\kappa'(s)ds = 0.$$

4. *Montrer que* $\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi$. *[On pourra utiliser l'interprétation de* κ *comme la variation de l'angle de la tangente.]*
5. *On définit la courbe "décalée d'un rayon* r*" par la formule*

$$M_r(s) = M(s) - rN(s).$$

Indiquer à quelle condition M_r *est régulière et montrer en particulier que la condition est satisfaite pour* r *assez petit.*
6. *On suppose maintenant* $0 \le r < 1/\max|\kappa(s)|$. *Montrer que la longueur* L_r *de la courbe définie par* M_r *et l'aire* A_r *du domaine délimité vérifient :*

$$L_r = L + 2\pi r \qquad \text{et} \qquad A_r = A + rL + \pi r^2.$$

Solution :

1. On a $T = M' = (x', y')$ donc $N = (-y', x')$ puis $T' = M'' = (x'', y'') = \kappa N$ donc $x'' = -\kappa y'$ et $y'' = \kappa x'$.
2. On effectue une intégration par parties :

$$\int_0^L x(s)\kappa'(s)ds = [x(s)\kappa(s)]_0^L - \int_0^L \kappa(s)x'(s)ds = -\int_0^L \kappa(s)x'(s)ds,$$

puisque les fonction $x(s)$, $y(s)$ et donc $\kappa(s)$ etc sont toutes L-périodiques. On montre de même que $\int_0^L y(s)\kappa'(s)ds = -\int_0^L \kappa(s)y'(s)ds$
3. On a clairement $\int_0^L \kappa'(s)ds = [\kappa(s)]_0^L = 0$ puis

$$\int_0^L x\kappa'(s)ds = -\int_0^L \kappa(s)x'(s)ds = -\int_0^L y''(s)ds = [y'(s)]_0^L = 0$$

et de même

$$\int_0^L y\kappa'(s)ds = -\int_0^L \kappa(s)y'(s)ds = \int_0^L x''(s)ds = [x'(s)]_0^L = 0$$

d'où l'énoncé voulu.
4. Écrivons comme le suggère l'énoncé $T = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, alors $\kappa(s) = \theta'(s)$. Comme la courbe est simple et fermée, l'angle de la tangente subit une variation de 2π. Donc

$$\int_0^L \kappa(s)ds = \int_0^L \theta'(s)ds = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi.$$

5. On a $M_r' = M'(s) - rN'(s) = (1 + r\kappa(s))T(s)$ donc la courbe est régulière si et seulement si $1 + r\kappa(s) \neq 0$. Comme κ est bornée, cette condition est vérifiée pour r suffisamment petit (en fait $|r| < 1/\max|\kappa(s)|$ suffit).
6. On a $\|M'(s)\| = |1 + r\kappa(s)| = 1 + r\kappa(s)$ donc

$$L_r = \int_0^L \|M'(s)\|ds = \int_0^L (1 + r\kappa(s))ds = L + r\int_0^L \kappa(s)ds = L + 2\pi r.$$

Ensuite $x_r = x + ry'$, $y_r = y - rx'$ et $y_r' = y' - rx''$ donc

$$A_r = \int_0^L x_r y_r' ds = \int_0^L (x+ry')(y'-rx'')ds = A+r\int_0^L (y'^2-xx'')ds-r^2\int_0^L y'x''ds.$$

Ensuite on calcule par intégration par parties $-\int_0^L xx''ds = \int_0^L x'^2 ds$ donc

$$\int_0^L (y'^2 - xx'')ds = \int_0^L (y'^2 + x'^2)ds = \int_0^L ds = L.$$

Par ailleurs $-\int_0^L y'x''ds = \int_0^L y''x'ds$ et

$$\int_0^L (-y'x'' + x'y'')ds = \int_0^L \kappa(y'^2 + x'^2)ds = \int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi.$$

On en tire :

$$\int_0^L (-y'x'')ds = \frac{1}{2}\int_0^L \kappa(y'^2 + x'^2)ds = \frac{1}{2}\int_0^L \kappa(s)ds = \pi.$$

On a donc bien les deux formules demandées.