Partiel du 4 novembre 2011, "Courbes et surfaces"

(CS3, option L2 – Université Diderot Paris 7)

Les 4 exercices sont indépendants. Les documents autorisés sont le polycopié et vos notes de cours et TD. Les calculatrices (qui seraient d'ailleurs essentiellement inutiles) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 *On rappelle que* $\pi = 3,14\ldots$.

1. Existe-t-il un domaine plan d'aire 2 mètres carrés qui soit borné par une courbe de longueur égale à 5 mètres (resp. 6 mètres) ?
2. On se place dans le plan de coordonnées canoniques x, y. Comment placer les extrémités d'une ficelle de longueur 5 mètres sur la droite des x et déformer la ficelle de sorte que la surface délimitée par la droite des x et la ficelle ait une aire maximale ? Quelle est la valeur de l'aire maximale obtenue ?

Exercice 2 On considère la courbe plane suivante (où $t \in [0, 2\pi]$)

$$M(t) = (1 + \cos t)(\cos t, \sin t).$$

Déterminer les points où la courbe est régulière et calculer sa fonction courbure ainsi que sa longueur.

Exercice 3 On définit la courbe dans l'espace $M :]-1/4, 1/4[\to \mathbf{R}^3$:

$$M(t) = \left(\frac{1}{18}(1+4t)^{3/2}, \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}, \frac{2t}{3} \right)$$

Déterminer les points où elle est régulière, birégulière, calculer le trièdre de Frenet " T, N, B " ainsi que sa courbure et sa torsion. [On pourra commencer par vérifier si la courbe est paramétrée par sa longueur]

(suite au VERSO)

Exercice 4 *On se propose dans ce problème de caractériser en terme de courbure et torsion les courbes tracés sur une sphère. On considère une courbe birégulière de classe $\mathcal{C}^3$ dans l'espace $M = M(s)$ paramétrée par sa longueur et on note $(T, N, B) = (T(s), N(s), B(s))$ son trièdre de Frenet, $\kappa = \kappa(s)$ sa courbure et $\tau = \tau(s)$ sa torsion.*

1. Montrer que la courbe est plane si et seulement si $\tau = 0$ (on se placera dans la suite dans le cas non plan en supposant $\tau \neq 0$).
2. Supposons $\|M(s) - a\|^2 = r^2$, démontrer les formules
$$(M - a) \cdot M' = 0, \quad (M - a) \cdot M'' = -1 \quad \text{et} \quad (M - a) \cdot M''' = 0. \qquad (1)$$
3. Exprimer M', M'' et M''' dans la base T, N, B.
4. Écrivons $M - a = uT + vN + wB$ (avec u, v et w fonctions de s). Utiliser les formules de Frenet et les formules (1) pour montrer que
$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = r^2. \qquad (2)$$
[Indication : on pourra montrer que $u = 0$, $v = -1/\kappa$ et $w = \kappa'/\kappa^2\tau$ et observer que $u^2 + v^2 + w^2 = r^2$.]
5. En dérivant la formule (2), montrer que , pour toute courbe tracée sur une sphère, on a :
$$\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0. \qquad (3)$$
6. On suppose maintenant que la courbure et la torsion vérifient l'équation (3). En reprenant le calcul précédent, en déduire que la fonction $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2$ est constante.
7. On définit la fonction vectorielle $A(s) = M(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B(s)$. Montrer que $A(s)$ est constante [Indication : on pourra calculer $A'(s)$ et vérifier qu'elle est nulle.]
8. Montrer que la courbe $M(s)$ est située sur une sphère de centre $a = A(0)$.