CS3 Mathématiques, Université Paris7 novembre 2011

Corrigé du partiel Courbes et Surfaces

Exercice 1

1. *On rappelle que $\pi = 3,14\ldots$. Existe-t-il un domaine plan d'aire 2 mètres carrés qui soit borné par une courbe de longueur égale à 5 mètres (resp. 6 mètres) ?*

L'inégalité isopérimétrique assure que le disque d'aire deux mètres carrés est le domaine à bord régulier qui a le plus petit périmètre. Ce disque a pour rayon $r = \sqrt{2/\pi}$ (où la longueur est exprimée en mètres). Pour qu'il existe un domaine de périmètre l mètres et d'aire deux mètres carrés, il est donc nécessaire (et suffisant) que r vérifie $l \geq 2\pi r = 2\sqrt{2\pi}$, ou encore que $l^2 \geq 8\pi$. Ce qui n'est pas vrai pour $l = 5$ mètres mais qui est vrai si $l = 6$ mètres.

2. *On se place dans le plan de coordonnées canoniques x, y. Comment placer les extrémités d'une ficelle de longueur 5 mètres sur la droite des x et déformer la ficelle de sorte que la surface délimitée par la droite des x et la ficelle ait une aire maximale? Quelle est la valeur de l'aire maximale obtenue?*

Une remarque préliminaire, avant de résoudre la question posée. Si l'on dispose d'une ficelle de longueur L et que l'on souhaite entourer une aire maximale A avec celle-ci (sans appui sur un axe), découper cette ficelle en un certain nombre de bouts (qui peuvent être en nombre infini), chercher ensuite les aires maximales entourées par ces bouts, puis les additionner, conduit à une aire strictement plus petite que si la ficelle est entière. En effet, soit L_i la longueur de chaque bout ; par l'inégalité isopérimétrique, l'aire maximale A_i entourée par le bout de longueur L_i vaut $L_i^2/4\pi$ et l'on a l'inégalité stricte $4\pi \sum_i A_i = \sum_i L_i^2 < (\sum_i L_i)^2 = L^2 = 4\pi A$ (dès qu'il y a deux bouts de longueur > 0).

Supposons que l'on puisse trouver un domaine régulier qui réalise le maximum de l'aire et qui soit d'une part bordé par la droite des x et d'autre part par une ficelle de longueur 5 mètres (ses extrémités étant sur l'axe des x). Il convient d'abord d'observer que l'on peut se ramener à considérer que le domaine en question se situe d'un seul côté de l'axe : on peut choisir un côté et remplacer tout *morceau* d'un tenant du domaine (tout *bout de ficelle* bordant un tel *morceau* a ses extrémités et elles seules sur l'axe) qui n'est pas du bon côté en le reportant de l'autre côté, par symétrie et translation, sans changer sa surface totale ni augmenter la longueur totale de la ficelle. Pour s'assurer qu'il existe bien une disposition assez écartée des bouts de ficelle d'un même côté de l'axe telle que les morceaux des domaines obtenus ne se rencontrent pas, on introduit l'*intervalle image* par la projection orthogonale sur l'axe des x d'un *bout de ficelle*. Comme cette projection diminue les longueurs, on peut écarter tous les *intervalles images*, dont la somme des longueurs est < 5 (et qui sont naturellement ordonnés par le paramétrage de la ficelle) par des translations bien choisies.

Soit D un tel domaine d'aire maximal et soit D^σ son image par la symétrie σ autour de l'axe des x. La réunion $D \cup D^\sigma$ est un domaine régulier de périmètre $l \leq 10$ mètres (au moins C^1 par morceaux) qui maximise l'aire parmi les domaines Δ de périmètre l qui sont de plus symétriques pour σ (c'est-à-dire les domaines qui vérifient $\sigma(\Delta) = \Delta$). Mais un disque de périmètre 10 mètres (on a $10 \geq l$) dont le centre est sur l'axe des x est symétrique par σ et il maximise l'aire parmi tous les domaines de périmètre 10, donc aussi parmi ceux qui sont de plus symétriques pour σ et de périmètre ≤ 10. La solution du problème posé est donc un demi-disque, dont la demie circonférence a pour périmètre 5 mètres et son rayon est $5/\pi$ mètres. La surface maximale correspondante est $25/2\pi$ mètres carrés.

Exercice 2

On considère la courbe plane suivante (où $t \in [0, 2\pi]$)

$$M(t) = (1 + \cos t)(\cos t, \sin t).$$

Déterminer les points où la courbe est régulière et calculer sa fonction courbure ainsi que sa longueur.

Calculons les deux premières dérivées de la courbe $M(t)$. On pose $u(t) = (\cos t, \sin t)$ et $\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t)$; pour tout t, les vecteurs $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ forment une base orthonormée directe et l'on a $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{v}(t)$ et $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{u}(t)$. On a

$$M'(t) = -\sin t\ \mathbf{u}(t) + (1 + \cos t)\, \mathbf{v}(t) \quad \text{et} \quad M''(t) = -(1 + 2\cos t)\, \mathbf{u}(t) - 2\sin t\ \mathbf{v}(t)\ .$$

La norme du vecteur vitesse est donc $\|M'(t)\| = \sqrt{2(1 + \cos t)}$, ce qui montre que les points t singuliers pour M sont $t = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. En dehors de ces points, la courbe M est régulière et sa courbure est donnée par

$$\kappa_M(t) = \frac{\text{dét}(M', M'')}{\|M'(t)\|^3} = \frac{3(1 + \cos t)}{(2(1 + \cos t))^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2(1 + \cos t)}}\ .$$

Enfin, la longueur L de M quand t va de 0 à 2π est donnée par l'intégrale

$$L = \int_0^{2\pi} \|M'(t)\|\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos t)}\ dt\ .$$

Il est astucieux et utile de se rappeler ici de l'identité $\cos t = 2\cos^2(t/2) - 1$ et donc $\sqrt{2(1 + \cos t)} = 2|\cos(t/2)|$. On en déduit (avec $u = t/2$)

$$L = \int_0^{2\pi} 2|\cos(t/2)|\ dt = 8 \int_0^{\pi} \cos(t/2)\ d(t/2) = 8 \int_0^{\pi/2} \cos u\ du = 8\ .$$

Exercice 3

On définit la courbe dans l'espace $M :]-1/4, 1/4[\to \mathbf{R}^3$ *:*

$$M(t) = \left(\frac{1}{18}(1+4t)^{3/2}, \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}, \frac{2t}{3} \right)$$

Déterminer les points où elle est régulière, birégulière, calculer le trièdre de Frenet "T, N, B " ainsi que sa courbure et sa torsion. [On pourra commencer par vérifier si la courbe est paramétrée par sa longueur]

Calculons les deux premières dérivées de M. On a, pour tout t dans l'intervalle $]-1/4, 1/4[$

$$M'(t) = (\frac{\sqrt{1+4t}}{3}, -\frac{2\sqrt{1-t}}{3}, \frac{2}{3}) \quad \text{et} \quad M''(t) = (\frac{2}{3\sqrt{1+4t}}, \frac{1}{3\sqrt{1-t}}, 0) \ .$$

On en tire $\|M'(t)\|^2 = \frac{1}{9}(1+4t) + \frac{4}{9}(1-t) + \frac{4}{9} = 1$ et la courbe est paramétrée par sa longueur d'arc et régulière sur l'intervalle $[-1/4, 1/4]$. On a $T(t) = M'(t)$. Pour $t \in]-1/4, 1/4[$, le vecteur accélération est donc colinéaire au vecteur normal et vérifie

$$\kappa^2 = \|M''(t)\|^2 = \frac{4}{9}(1+4t)^{-1} + \frac{1}{9}(1-t)^{-1} = \frac{5}{9(1+4t)(1-t)} \ ,$$

c'est-à-dire que la courbure de M est donnée par $\kappa = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{(1+4t)(1-t)}}$. La courbe est birégulière sur l'intervalle $]-1/4, 1/4[$.

Son repère de Frenet pour $t \in]-1/4, 1/4[$ est donc formé par les vecteurs $T(t) = M'(t)$ et (calculant $N(t) = \frac{M''(t)}{\|M''(t)\|}$ et $B = T \wedge N$)

$$N(t) = \frac{(2\sqrt{1-t}, \sqrt{1+4t}, 0)}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{(-2\sqrt{(1+4t)}, 4\sqrt{(1-t)}, 5)}{3\sqrt{5}} \ .$$

Enfin la torsion τ de M, avec la convention du cours (attention, j'ai pris par mégarde la convention inverse en td (sic !)), est donnée par exemple par la formule $B' = -\tau N$, on trouve $\tau = \frac{2}{3\sqrt{(1+4t)(1-t)}} = \frac{2\kappa}{\sqrt{5}}$. Comme le rapport κ/τ est constant, la courbe M est une hélice, c'est-à-dire que son vecteur vitesse fait l'angle constant α (où $\tan\alpha = \kappa/\tau = \sqrt{5}/2$) avec la direction fixe $A = \cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B$ (faire le calcul et voir aussi le cours ou D.J. Struik, *Lectures on classical Differential Geometry,* Dover NY, pages 33 et 34).

Exercice 4

On se propose dans ce problème de caractériser en terme de courbure et torsion les courbes tracés sur une sphère. On considère une courbe bi-régulière de classe $\mathcal{C}^3$ dans l'espace $M = M(s)$ paramétrée par sa longueur et on note $(T, N, B) = (T(s), N(s), B(s))$ son trièdre de Frenet, $\kappa = \kappa(s)$ sa courbure et $\tau = \tau(s)$ sa torsion.

1. *Montrer que la courbe est plane si et seulement si $\tau = 0$ (on se placera dans la suite dans le cas non plan en supposant $\tau \neq 0$).*

Puisque la courbe M est birégulière et de classe C^3 - et que son repère de Frenet est donc toujours bien défini - on voit que l'on peut dériver B et que l'on a $B'(s) = 0$, c'est-à-dire que le vecteur $T(s) \wedge N(s) = B(s) = \mathbf{b}$ est en fait un vecteur constant $\mathbf{b}$. On déduit de ceci que $T(s)$ et $N(s)$ sont orthogonaux à $\mathbf{b}$, et donc que M reste dans un même plan (orthogonal à $\mathbf{b}$). En effet, si le produit scalaire $M'(s) \cdot \mathbf{b}$ de $M'(s) = T(s)$ par $\mathbf{b}$ est nul, alors $M(s) \cdot \mathbf{b}$, qui admet $M'(s) \cdot \mathbf{b}$ pour dérivée, vérifie $M(s) \cdot \mathbf{b} = c$, où c est une constante. Or l'ensemble des vecteurs V qui vérifient $V \cdot \mathbf{b} = c$ est un plan affine.

Réciproquement, si une courbe birégulière est plane, elle vérifie $M(s) \cdot \mathbf{b} = c$, où c est constant et $\mathbf{b} \neq 0$ et l'on a $M'(s) \cdot \mathbf{b} = M''(s) \cdot \mathbf{b} = 0$. Le vecteur $B(s) = M'(s) \wedge M''(s)/\|M'(s) \wedge M''(s)\|$ est donc égal à $\pm\mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$ (propriété du produit vectoriel), d'où il vient que B' et τ sont nuls.

2. *Supposons $\|M(s) - a\|^2 = r^2$, démontrer les formules*

$$(M - a) \cdot M' = 0, \quad (M - a) \cdot M'' = -1 \quad \text{et} \quad (M - a) \cdot M''' = 0. \tag{1}$$

Puisque l'on a

$$\|M(s) - a\|^2 = (M(s) - a) \cdot (M(s) - a) = r^2$$

on trouve (par dérivations successives) d'abord $(M(s) - a) \cdot M'(s) = 0$, puis $(M(s) - a) \cdot M''(s) + M'(s) \cdot M'(s) = 0$, soit $(M(s) - a) \cdot M''(s) = -1$ (car $M'(s) = T(s)$, la courbe étant paramétrée par la longueur) ; enfin en dérivant encore la dernière égalité, on trouve $(M(s) - a) \cdot M'''(s) + M'(s) \cdot M''(s) = 0$ et, comme M'' est orthogonal à M' (la courbe étant paramétrée par la longueur), on obtient aussi la dernière égalité demandée $(M(s) - a) \cdot M'''(s) = 0$. Finalement, on a bien obtenu les formules

$$(M(s) - a) \cdot M'(s) = 0 \ , \ (M(s) - a) \cdot M''(s) = -1 \ , \ (M(s) - a) \cdot M'''(s) = 0 \ .$$

3. *Exprimer M', M'' et M''' dans la base T, N, B.*

La courbe M étant paramétrée par sa longueur, on a $M' = T$ et $M'' = \kappa N$; enfin, dérivant cette dernière identité, on trouve $M''' = \kappa' N - \kappa^2 T + \kappa\tau B$ (avec les conventions du cours et du livre de Struik cité plus haut).

4. *Écrivons $M - a = uT + vN + wB$ (avec u, v et w fonctions de s). Utiliser les formules de Frenet et les formules* (1) *pour montrer que*

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = r^2. \tag{2}$$

[Indication : on pourra montrer que $u = 0$, $v = -1/\kappa$ et $w = \kappa'/\kappa^2\tau$ et observer que $u^2 + v^2 + w^2 = r^2$.]

Suivant l'énoncé, on introduit (pour chaque s) la décomposition suivante de $M(s) - a$ dans la base de Frenet $T(s), N(s), B(s)$

$$M(s) - a = u(s)\,T(s) + v(s)\,N(s) + w(s)\,B(s)$$

où u, v, w sont des fonctions de s qui sont toutes au moins de classe C^1. La première formule établie au 2. dit que $M(s) - a$ est orthogonal à $M'(s) = T(s)$, et on a $u = 0$. La deuxième formule dit que le produit scalaire de $M(s) - a$ avec $M''(s) = \kappa(s)\,N(s)$ vaut -1, donc on a $v(s) = (M(s) - a) \cdot N = -1/\kappa$. En utilisant l'expression de M''' donnée au 3., on tire de la troisième formule du 2. (on sait que $u = 0$)

$$0 = (M(s){-}a)\cdot(\kappa'(s)N(s){-}\kappa^2(s)T(s){+}\kappa(s)\tau(s)B(s)) = \kappa'(s)\,v(s){+}\kappa(s)\tau(s)\,w(s)\ ,$$

d'où l'on déduit (avec nos hypothèses, on a κ et τ partout non nuls) $w = \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}$. Revenant à l'hypothèse initiale du 2., on a donc (le trièdre de Frenet est orthonormé pour tout s)

$$\|M - a\|^2 = v^2 + w^2 = (\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})^2 = r^2\ .$$

5. *En dérivant la formule* (2), *montrer que , pour toute courbe tracée sur une sphère, on a :*

$$\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0. \qquad (3)$$

On peut dériver l'identité établie à la question précédente. Puisque les fonctions κ et w sont de classe C^1, on opère de la manière suivante

$$-2\frac{\kappa'}{\kappa^3} + 2\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})' = 0\ , \quad \text{d'où il suit} \quad (\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})' - \frac{\tau}{\kappa} = 0\ .$$

Remarque *On considère ici la dérivée d'une fonction faisant intervenir τ qui n'est pas supposée dérivable (si M n'est que C^3) ; il convient donc d'observer, à tout le moins, que la fonction $w = \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}$ est supposée dérivable, qu'elle est donc C^1 et tout ceci vient de l'équation donnée dans l'énoncé de la question 6..*

6. *On suppose maintenant que la courbure et la torsion vérifient l'équation* (3). *En reprenant le calcul précédent, en déduire que la fonction $\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2$ est constante.*

Le calcul précédent affirme que la fonction continue $(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})' - \frac{\tau}{\kappa} = 0$ est - à un facteur non nul près - la dérivée de $(\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})^2$ (fonction de classe C^1). Cette dernière fonction est donc constante sur l'intervalle de définition de M.

7. *On définit la fonction vectorielle $A(s) = M(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B(s)$. Montrer que $A(s)$ est constante [Indication : on pourra calculer $A'(s)$ et vérifier qu'elle est nulle.]*

La fonction vectorielle $A(s) = M(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) - (\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})(s)B(s)$ est de classe C^1 et vérifie

$$A' = M' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N - T + \frac{\tau}{\kappa}B - \frac{\tau}{\kappa}B + \frac{\kappa'}{\kappa^2}N = 0 \ ,$$

elle est donc constante et pour tout s on a donc $A(s) = A(0) = a$.

8. *Montrer que la courbe $M(s)$ est située sur une sphère de centre $a = A(0)$.*

On déduit de la définition de A donnée au 7. que $\|M - a\|^2$ - qui vaut $v^2 + w^2 = (\frac{1}{\kappa})^2 + (\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau})^2$ - est une constante (positive) r^2, ce qui dit que $M(s)$ varie sur la sphère de centre a et de rayon r.