UNIVERSITÉ PARIS 7
DENIS DIDEROT

MI3

Algèbre et analyse fondamentales I

CHAPITRE I

SÉRIES NUMÉRIQUES

année 2008-2009

Auteur : Thierry Joly

**Département de Formation
de 1^er Cycle de Sciences Exactes**

SÉRIES NUMÉRIQUES

Plan du chapitre :

1 Compléments et rappels sur les suites numériques

1.1 Limites de suites complexes

1.2 Limites de suites réelles

2 Généralités sur les séries numériques

3 Séries à termes positifs

3.1 Détermination de la nature d'une série par comparaison

3.2 Critères de d'Alembert et de Cauchy

3.3 Comparaison d'une série à une intégrale impropre

4 Séries absolument convergentes

5 Exemples et contre-exemples

SÉRIES NUMÉRIQUES

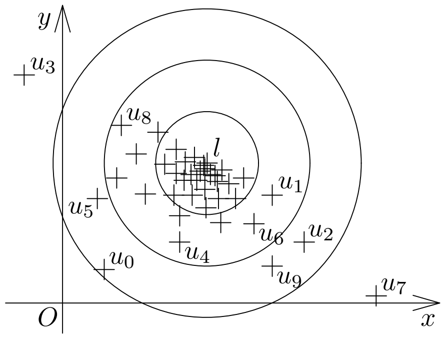
1 Compléments et rappels sur les suites numériques

1.1 Limites de suites complexes

Commençons par rappeler la définition formelle de suite numérique (complexe).

Définition Une *suite complexe* est une application de $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{C}$, où n_0 est un entier quelconque. La valeur de cette application pour un argument n est alors notée u_n (plutôt que $u(n)$) et appelée *terme d'indice* n ; cette application est elle-même notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Dire qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ a pour limite $l \in \mathbb{C}$ signifie que seul un nombre fini de ses termes rate une cible circulaire quelconque centrée en l, aussi petite soit-elle :



. . . bien sûr, plus la cible sera choisie petite, plus de termes u_n la rateront, mais toujours un nombre fini d'entre eux !

Exprimons cette définition en termes plus mathématiques. Dire qu'un terme u_n rate une cible de rayon $\varepsilon > 0$ centrée en l signifie que la distance $|u_n - l|$ entre u_n et l dans le diagramme d'Argand (ci-dessus) dépasse ε : $|u_n - l| > \varepsilon$. Dire que les termes u_n ratant une telle cible sont en nombre fini revient à dire que leurs indices se trouvent contenus dans un ensemble fini $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, autrement dit que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, tous les termes u_n d'indices $n \geqslant k$ atteignent la cible, i.e. $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, la définition ci-dessus peut s'énoncer de la façon suivante : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes u_n vérifient : $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

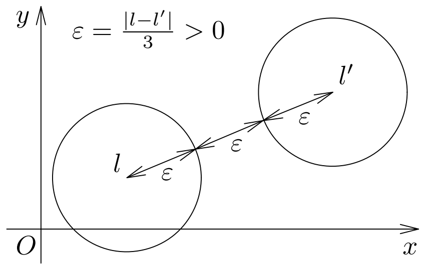
Définition On dit que $l \in \mathbb{C}$ est *limite* d'une suite complexe $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant k \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

Les suites possédant une limite $l \in \mathbb{C}$ sont dites *convergentes* et les autres *divergentes*.

Proposition 1 (Unicité de la limite) *Toute suite complexe possède au plus une limite.*

Démonstration Supposons qu'une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ possède deux limites $l \neq l'$. En choisissant $\varepsilon = |l-l'|/3 > 0$ dans la définition de limite, il s'ensuit que tous les termes u_n à partir d'un certain rang k_1 vérifient $|u_n - l| \leqslant |l-l'|/3$ et que tous les termes u_n à partir d'un certain rang k_2 vérifient $|u_n - l'| \leqslant |l-l'|/3$. Le terme u_k, où $k = \max(k_1, k_2)$, vérifie alors alors à la fois $|u_n - l| \leqslant |l-l'|/3$ et $|u_n - l'| \leqslant |l-l'|/3$. Cela signifie, en termes imagés, que u_k atteint les deux cibles de rayon $|l-l'|/3$ centrées en l et l' ; or ceci est impossible, car ces deux cibles sont disjointes :



L'application de l'inégalité triangulaire suivante (†) entraîne d'ailleurs l'absurdité recherchée :

$$|l-l'| \;=\; |(l-u_k)+(u_k-l')| \overset{(\dagger)}{\leqslant} |l-u_k| + |u_k-l'| \;\leqslant\; \frac{|l-l'|}{3} + \frac{|l-l'|}{3} \;=\; \frac{2}{3}\,|l-l'|.$$

□

Puisqu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne peut avoir qu'une seule limite, on peut sans ambiguïté noter cette dernière :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Attention, cette notation *n'a aucun sens* lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente.

La mise en œuvre de la définition de limite est plutôt pénible, notamment à cause de la série de quantificateurs $\forall\varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant n\ \ldots$ qui la débute. Cette triste réalité est d'ailleurs illustrée par les démonstrations des propositions ci-dessous. Heureusement, ces mêmes propositions permettent dans la plupart des cas courants d'éviter une utilisation directe de cette définition.

Proposition 2 *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{C}$*, alors pour tout* $c \in \mathbb{C}$ *:*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \lim_{n\to+\infty} cu_n = cl,\\
&\text{(ii)} && \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l',\\
&\text{(iii)} && \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'.
\end{aligned}$$

Démonstration (i). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\varepsilon' > 0$ tel que $|c|.\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ (par exemple, $\varepsilon/|c|$ si $c \neq 0$, et n'importe quel réel strictement positif si $c = 0$) ; selon l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe donc un rang k à partir duquel les termes u_n vérifient : $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$, d'où :

$$n \geqslant k \quad\Rightarrow\quad |cu_n - cl| = |c|.|u_n - l| \leqslant |c|.\varepsilon' \leqslant \varepsilon.$$

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe bien un entier k tel que pour tout $n \geqslant k$: $|cu_n - cl| \leqslant \varepsilon$.

(ii). Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Les hypothèses $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ entraînent l'existence d'un rang k_1 à partir duquel les termes u_n vérifient $|u_n - l| \leqslant \varepsilon/2$ et l'existence d'un rang k_2 à partir duquel les termes v_n vérifient $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon/2$. En posant $k = \max(k_1, k_2)$, on obtient donc :

$$n \geqslant k \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |u_n - l| \leqslant \varepsilon/2 \\ |v_n - l'| \leqslant \varepsilon/2 \end{array}\right. \ \Rightarrow \ |(u_n + v_u) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant \varepsilon.$$

(iii). Par hypothèse, il existe un rang k_0 à partir duquel les termes u_n vérifient $|u_n - l| \leqslant 1$ et donc $|u_n| = |(u_n - l) + l| \leqslant |u_n - l| + |l| \leqslant 1 + |l|$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang k_ε à partir duquel les termes v_n vérifient $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon/(1 + |l|)$, d'où pour tout $n \geqslant \max(k_0, k_\varepsilon)$:

$$|u_n(v_u - l') - 0| = |u_n|.|v_n - l'| \leqslant (1 + |l|) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + |l|} = \varepsilon.$$

Cela établit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(v_u - l') = 0.$$

On a de plus par l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ et (i) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n l' = ll',$$

d'où par (ii) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n v_u = \lim_{n \to +\infty} \big(u_n(v_u - l') + u_n l'\big) = 0 + ll' = ll'.$$

□

Remarque Chaque énoncé de cette proposition 2 en contient deux, le premier affirmant la convergence d'une suite et le second précisant la valeur de sa limite. Ainsi, ces énoncés (i)-(iii) expriment d'abord que la limite des suites $c.(u_n)_{n \geqslant n_0} \overset{\text{déf}}{=} (cu_n)_{n \geqslant n_0}$, $(u_n)_{n \geqslant n_0} + (v_n)_{n \geqslant n_0} \overset{\text{déf}}{=} (u_n + v_n)_{n \geqslant n_0}, \ldots$ *existe*, avant d'en préciser la valeur. En particulier, les énoncés (i) et (ii) expriment que l'ensemble E_{n_0} des suites convergentes $(u_n)_{n \geqslant n_0}$, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication par un complexe, *est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel*, puis que l'application $\lim \ : \ E_{n_0} \to \mathbb{C}$ est *linéaire*.

Rappelons qu'une fonction f, définie au moins sur $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - z_0| < r\}$ pour un certain $r > 0$, est dite *continue en z_0* lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \Big(|z - z_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Proposition 3 *Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$, alors pour toute fonction f définie sur $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - z_0| < r\}$ $(r > 0)$ et continue en l :*

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l).$$

Démonstration Par définition de la continuité de f en l, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que : $|z - l| < \eta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(l)| \leqslant \varepsilon$, et par l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$, il existe un rang k à partir duquel les termes u_n vérifient : $|u_n - l| \leqslant \eta$, d'où :

$$n \geqslant k \ \Rightarrow \ |u_n - l| \leqslant \eta \ \Rightarrow \ |f(u_n) - f(l)| \leqslant \varepsilon.$$

□

L'intérêt de cette dernière proposition réside dans le fait que les fonctions les plus usuelles (cos, sin, exp, ...) sont habituellement continues en tout point de leur domaine de définition naturel. Par exemple, la fonction $z \mapsto 1/z$ est définie et continue en tout $z_0 \neq 0$ et la fonction $z \mapsto |z|$ est définie et continue en tout $z_0 \in \mathbb{C}$; il s'ensuit donc :

Corollaire 4 *Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$, alors :*

$$\text{(i)} \quad l \neq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to +\infty} (1/u_n) = 1/l,$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to +\infty} |u_n| = |l|.$$

1.2 Limites de suites réelles

Les suites réelles (i.e. dont tous les termes sont réels) ne sont jamais que des suites complexes particulières et tout ce qui a été dit précédemment les concernent évidemment. Remarquons seulement que leurs limites éventuelles sont nécessairement réelles :

Proposition 5 *Si une suite réelle* $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *a une limite* l*, alors* $l \in \mathbb{R}$

Démonstration En effet, posons alors $l = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang k à partir duquel les termes u_n vérifient $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, donc : $|b| \leqslant \sqrt{(u_k - a)^2 + b^2} = |u_k - l| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, on a $|b| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $b = 0$.

□

Bien sûr, il s'ensuit que pour une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ayant une limite l, l'expression $|u_n - l|$ dans la définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant k \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

désigne simplement la valeur absolue de $u_n - l$.

L'objet véritable de cette section sur les limites de suites réelles est de rappeler des notions et des faits qui mettent en jeu l'ordre naturel des réels et qui sont donc vides de sens pour les suites complexes. Par exemple, du fait qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est formellement une application de $\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer tout le vocabulaire usuel des fonctions réelles :

Définition On dit qu'une suite *réelle* $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est

- *majorée par* $M \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant M$,
- *minorée par* $m \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant m$,
- *croissante* lorsque : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$,
- *décroissante* lorsque : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$,
- *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante,
- *strictement croissante* lorsque : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} - u_n > 0$,
- *strictement décroissante* lorsque : $\forall n \geqslant n_0 \quad u_{n+1} - u_n < 0$,
- *strictement monotone* lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

D'autres définitions spécifiques aux suites réelles sont les suivantes :

Définition • On dit que qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *diverge vers* $+\infty$ et l'on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant k \quad u_n \geqslant M.$$

• On dit que qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *diverge vers* $-\infty$ et l'on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, lorsque :

$$\lim_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty.$$

À l'instar de la définition de limite d'une suite complexe, on peut exprimer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ de la façon suivante : Pour tout $M \in \mathbb{R}$, seul un nombre fini de termes u_n sont inférieurs à M. De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ signifie que pour tout $M \in \mathbb{R}$, seul un nombre fini de termes u_n sont supérieurs à M.

La proposition suivante établit un lien entre ces nouvelles définitions et celle de limite finie :

Proposition 6 • *Pour toute suite réelle* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *dont les termes sont* strictement positifs *à partir d'un certain rang :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} 1/u_n = 0.$$

• *Pour toute suite réelle* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *dont les termes sont* strictement négatifs *à partir d'un certain rang :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim_{n\to+\infty} 1/u_n = 0.$$

Nous ne rappellerons pas ici la liste exhaustive des règles de calculs invoquant des limites infinies, telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \in \,]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty.$$

Comme toutes ces règles se retrouvent facilement par l'intuition (par exemple : "$1+\infty=+\infty$", "$(-2).(+\infty)=-\infty$", ...), il est surtout utile — et même tout à fait indispensable — de se souvenir des "cas d'indétermination", i.e. des situations non tranchées par une règle :

$$\boxed{\infty-\infty,\quad 0\,.\,\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty^0,\quad 0^0,\quad 1^\infty.}$$

Rappelons plutôt que l'ordre des réels permet d'obtenir la limite d'une suite réelle $(v_n)_{n\geqslant n_0'}$ par encadrement rapproché ou pourchasse à l'infini :

Théorème 7 (dit "des gendarmes") *Pour toutes suites* réelles $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0'}$, $(w_n)_{n\geqslant n_0''}$ *:*

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \forall\, n\geqslant k \quad u_n\leqslant v_n\leqslant w_n \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l\in\mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \\
\text{(ii)} & \forall\, n\geqslant k \quad u_n\leqslant v_n \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \\
\text{(iii)} & \forall\, n\geqslant k \quad u_n\geqslant v_n \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty
\end{array}$$

Ce théorème permet souvent de conclure là où toutes les règles évoquées plus haut échouent :

Exemple Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n$.
Il est vain d'invoquer ici une quelconque règle sur la limite d'une somme, car $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas. En revanche, on conclut facilement à l'aide du théorème 7 (ii) :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n+(-1)^n\geqslant n-1$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n=+\infty$.

Concluons ces rappels sur les limites de suites par un autre théorème à caractère policier.

Théorème 8 *Pour toute suite réelle* croissante $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *:*

$$(u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est majorée} \iff (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est convergente.}$$

Ce dernier énoncé a quelque chose de remarquable : de tous ceux rappelés ici, c'est le seul à établir la convergence d'une suite *sans en préciser la limite.* Contrairement aux précédents, sa démonstration engage une définition précise des réels et s'avère de ce fait particulièrement délicate.

2 Généralités sur les séries numériques

Pour toute suite numérique $(a_n)_{n\geqslant n_0}$, on appelle *série de terme général* a_n la suite $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ (que l'on notera $\sum\limits_n a_n$ dans ce cours) définie par :

$$s_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n.$$

Une série n'est donc pas un objet mathématique nouveau, mais seulement une suite exprimée d'une façon particulière. En effet, toute suite $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ peut être présentée sous la forme d'une série $\sum\limits_n a_n$ en posant : $a_{n_0} = s_{n_0}$ et pour tout $n > n_0$: $a_n = s_n - s_{n-1}$.

L'intérêt des séries réside dans le pouvoir expressif et la souplesse d'utilisation de la notation $\sum$ des sommes. Encore faut-il apprivoiser a minima cette notation. Il s'agit par exemple, de rendre tout à fait familières des transformations d'usage courant telles que :

$$\sum_{n=p}^{q}(a_n + b_n) = \sum_{n=p}^{q} a_n + \sum_{n=p}^{q} b_n, \qquad c\sum_{n=p}^{q} a_n = \sum_{n=p}^{q} ca_n, \qquad \sum_{n=p}^{q} a_{n+1} = \sum_{n=p+1}^{q+1} a_n,$$

et qui résultent des propriétés les plus élémentaires de l'addition et de la multiplication, puisque la première est une conséquence de l'associativité et de la commutativité de l'addition, la seconde ne fait qu'exprimer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la troisième découle immédiatement du sens des notations. Reconnaissons que ces relations sont tout de même plus faciles à justifier que leur analogue concernant les intégrales :

$$\int_p^q (f(t)+g(t))\,dt = \int_p^q f(t)\,dt + \int_p^q g(t)\,dt, \quad c\int_p^q f(t)\,dt = \int_p^q cf(t)\,dt, \quad \int_p^q f(t+1)\,dt = \int_{p+1}^{q+1} f(t)\,dt.$$

La limite d'une série de terme général a_n ($n \geqslant n_0$), i.e. $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=n_0}^{k} a_n$, est simplement notée :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n\geqslant n_0} a_n.$$

C'est ces toutes dernières notations qui confèrent aux séries leur grand pouvoir expressif. Par exemple, personne ne sait exprimer la limite $l \in \mathbb{R}$ de la série de terme général $1/n^3$ ($n \geqslant 1$) plus simplement que comme la limite de cette série précisément (on ne connaît aucune expression de l à l'aide de $\pi, e, +, -, \sqrt{\ }, \ldots$). La dernière notation permet d'écrire, sans avoir à faire de définition annexe :

$$l = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}.$$

Les séries permettent donc d'exprimer synthétiquement des nombres que l'on ne saurait désigner autrement.

Le vocabulaire des séries présente une légère difficulté. Le “terme général a_n” d'une série $\sum\limits_n a_n$ n'est pas le terme général de cette dernière en tant que suite $(s_n)_{n\geqslant n_0}$. En effet, l'expression “terme général de la suite $(s_n)_{n\geqslant n_0}$” désigne directement s_n, autrement dit la somme $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$. Par ailleurs, on nomme indifféremment “série” la suite $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ et sa limite. Cet abus de langage courant ne porte pas à conséquence, car le contexte permet toujours de savoir de quoi l'on parle. Ainsi, dans l'énoncé : “la série converge et vaut 2”, il est clair que c'est la suite qui converge et sa limite qui vaut 2. De même, la notation $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est indistinctement employée pour désigner la suite et sa limite. Toutefois, nous ne suivrons ce dernier usage dans ce chapitre, où l'on notera systématiquement $\sum\limits_n a_n$ la suite et $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ sa limite.

Les séries recèlent aussi un piège constant — autrement plus sérieux que ces problèmes terminologiques — qu'on va illustrer à travers un exemple. Comme nous n'avons pas encore débuté leur étude, nous allons allons adopter (dans cet exemple seulement) une notation naïve de leurs limites :

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$$

Exemple Déterminons la valeur précise de $l = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$

En changeant en + les signes − des termes $-\frac{1}{2n}$, on rajoute deux fois chacun de ces termes, donc :

$$\begin{aligned} l &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \cdots + \frac{2}{2n} + \cdots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Pourtant, on regroupant deux à deux les termes initiaux, on voit bien que chaque paire de termes ainsi formée est positive, donc :

$$l = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots \geqslant \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 0 + \cdots + 0 + \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

Ainsi, on obtient $0 \geqslant \frac{1}{2}$. Où est l'erreur ? Comme on le verra plus tard, la série $\sum_n (-1)^{n+1}/n$ converge bien, autrement dit l est un réel bien défini. Par ailleurs, la minoration $l \geqslant 1/2$ effectuée ci-dessus est parfaitement correcte, donc $l \neq 0$. Dans le calcul de l plus haut, notre seule erreur a été d'utiliser la série $\sum_n 1/n$, appelée *série harmonique*, sans s'assurer qu'elle soit bien convergente. Puisque nous n'avons pas commis d'autre erreur, notre raisonnement menant à la relation $0 \geqslant \frac{1}{2}$ est en fait une démonstration par l'absurde que la série harmonique diverge. On peut aussi s'en persuader directement, en regroupant ses 2^n premiers termes par paquets successifs de $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^k, \ldots, 2^{n-1}$ termes :

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{1 terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\text{2 termes}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 termes}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}\text{ termes}} \\ &\geqslant 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{1 terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\text{2 termes}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 termes}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}\text{ termes}} \\ &= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n}\right)}_{n\text{ termes}} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right)}_{n\text{ termes}} = 1 + \frac{n}{2}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la somme $s_k = \sum_{n\leqslant k} \frac{1}{n}$ de ses k premiers termes finit par dépasser n'importe quel réel, i.e. :

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n\leqslant k} \frac{1}{n} = +\infty.$$

La série harmonique diverge donc, bien que son terme général tende vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La morale à tirer de cet exemple est que, dans un calcul numérique mentionnant des séries, il faut s'assurer de la convergence de *chacune* de ces séries, sans quoi le calcul perd tout sens et peut mener à n'importe quel résultat.

Or la question de savoir si une série donnée converge ou non — on dit "déterminer *la nature de la série*" — est généralement délicate. Le reste de ce chapitre est d'ailleurs consacré à cette question et, pour plus de clarté, on adopte les abréviations suivantes :

$$\sum_n a_n \text{ CV} \overset{\text{déf}}{\iff} \text{la série de terme général } a_n \text{ converge}$$
$$\sum_n a_n \text{ DV} \overset{\text{déf}}{\iff} \text{la série de terme général } a_n \text{ diverge.}$$

Proposition 9

(i). *Si les suites* (a_n) *et* (b_n) *vérifient* $a_n = b_n$ *à partir d'un certain rang* k*, alors les séries de termes généraux* a_n *et* b_n *sont de même nature :*

"La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes."

(ii). $\sum_n a_n$ CV $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *(Attention :* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n$ CV*, cf exemple plus haut.)*

(iii). $\sum_n a_n$ CV $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{i>n} a_i = 0$ *: "Le reste d'une série convergente tend vers 0."*

(iv). *Si* $\sum_n a_n$ CV *et* $\sum_n b_n$ CV*, alors* $\sum_n (a_n + b_n)$ CV *et l'on a :*

$$\textstyle\sum_{n\geqslant n_0}(a_n + b_n) = \left(\sum_{n\geqslant n_0} a_n\right) + \left(\sum_{n\geqslant n_0} b_n\right).$$

(v). *Si* $\sum_n a_n$ CV*, alors pour tout nombre* λ*,* $\sum_n \lambda a_n$ CV *et l'on a :*

$$\textstyle\sum_{n\geqslant n_0} \lambda a_n = \lambda\left(\sum_{n\geqslant n_0} a_n\right).$$

(Attention : $\sum_n a_n$ CV *et* $\sum_n b_n$ CV $\not\Rightarrow \sum_n a_n b_n$ CV.*)*

Démonstration (i). Considérons les sommes partielles :

$$s_n = \sum_{i\leqslant n} a_i, \qquad t_n = \sum_{i\leqslant n} b_i,$$

ainsi que les constantes :

$$u = \sum_{i<k} a_i, \qquad v = \sum_{i<k} b_i.$$

Par hypothèse, on a pour tout $n \geqslant k$:

$$s_n - u = \sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n} b_i = t_n - v,$$

de sorte que les suites (s_n) et (t_n) convergent toutes deux ou divergent toutes deux.

(ii). On a : $a_n = s_n - s_{n-1}$; si $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

(iii). Par définition de la somme d'une série convergente, on a :

$$\sum_{i>n} a_i = \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i = \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=n+1}^{m} a_i = \lim_{m\to+\infty}(s_m - s_n) = s - s_n\,,$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i>n} a_i = s - \lim_{n\to+\infty} s_n = 0.$$

Les propriétés (iv) et (v) sont des conséquences immédiates des relations algébriques :

$$\sum_{i\leqslant n}(a_i+b_i)=\sum_{i\leqslant n}a_i+\sum_{i\leqslant n}b_i,\qquad \sum_{i\leqslant n}\lambda a_i=\lambda\sum_{i\leqslant n}a_i,$$

et des énoncés (i) et (ii) de la proposition 2.

$\square$

Remarques • La propriété (ii) fournit un test de base pour la nature d'une série $\sum_n a_n$: Si a_n ne tend pas vers 0, alors $\sum_n a_n$ diverge à coup sûr !

• Si la *nature* d'une série ne dépend pas de ses premiers termes (voir la propriété (i)), la *valeur de sa somme* — quand elle est convergente — dépend essentiellement de ses premiers termes ; on a en effet :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}a_i=\sum_{i=0}^{n}a_i+\text{ Reste}$$

et, d'après la propriété (iii), le reste tend vers 0 : la somme totale est donc voisine de la somme partielle des n premiers termes pour n suffisamment grand.

Exemple fondamental : La série géométrique de raison $q\in\mathbb{C}$ $\displaystyle\sum_n q^n$

La somme partielle $s_n=1+q+\cdots+q^n$ est égale à :

- $\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q\neq 1$,
- $n+1$ pour $q=1$,

ce qui conduit à la discussion suivante :

- Si $|q|<1$, $\sum_n q^n$ CV et on a : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}q^n=\frac{1}{1-q}\cdot$
- Si $|q|\geqslant 1$, $\sum_n q^n$ DV.

3 Séries à termes positifs

Comme la détermination de la nature d'une série $\sum_n a_n$ est un problème épineux, commençons par étudier un cas restreint : celui où tous termes a_n sont des réels *positifs*. La section suivante (4 Séries absolument convergentes) nous permettra d'en déduire la convergence de séries de terme général $a_n\in\mathbb{C}$ quelconque.

3.1 Détermination de la nature d'une série par comparaison

Proposition 10 *Soit (a_n) une suite de réels positifs. Pour que la série de terme général a_n converge, il faut et il suffit qu'il existe un réel M tel que pour tout entier n, on ait :*

$$\sum_{i\leqslant n}a_i\leqslant M.$$

Démonstration Les a_n étant des nombres positifs, la suite (s_n) des sommes partielles $s_n=\displaystyle\sum_{i\leqslant n}a_i$ est *croissante*. Cette proposition n'est donc qu'une répétition du théorème 8.

$\square$

Rappel L'énoncé "$a_n \sim b_n$ *quand* $n \to +\infty$" signifie très exactement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

(*et non :* a_n *est à peu près égal à* b_n).

Proposition 11 *Critères de comparaison. Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites de nombres* positifs.

(i). $\forall n \geqslant k \;\; a_n \leqslant b_n$ et $\sum_n b_n$ CV $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ CV.

(ii). $\forall n \geqslant k \;\; a_n \geqslant b_n$ et $\sum_n b_n$ DV $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ DV.

(iii). *Si l'on a :* $a_n \sim b_n$ *quand* $n \to +\infty$*, alors les séries de termes généraux* a_n *et* b_n *sont de même nature.*

Démonstration (i). On a alors pour tout $n \geqslant k$:

$$\sum_{i\leqslant n} a_i = \sum_{i<k} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i \leqslant \sum_{i<k} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i \leqslant \sum_{i<k} a_i + \sum_{i=k}^{+\infty} b_i = M$$

où $M \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de n, donc la proposition 10 entraîne : $\sum_n a_n$ CV.

(ii). Comme $\forall n \geqslant k \;\; b_n \leqslant a_n$, si $\sum_n a_n$ convergeait on aurait d'après (i) : $\sum_n b_n$ CV, ce qui contredit la deuxième hypothèse.

(iii). L'hypothèse $a_n \sim b_n$ entraîne l'existence d'un rang k tel que pour tout $n \geqslant k$: $|a_n/b_n - 1| < 1$, d'où $a_n/b_n - 1 < 1$ et donc $a_n \leqslant 2b_n$. Si $\sum_n b_n$ CV, alors $\sum_n 2b_n$ CV d'après la proposition 9 (v) et l'assertion (i) entraîne $\sum_n a_n$ CV. Comme l'hypothèse $a_n \sim b_n$ équivaut à $b_n \sim a_n$, on établit de la même façon en inversant les rôles de (a_n) et (b_n) : $\sum_n a_n$ CV $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ CV.

$\square$

Exemples • Déterminons la nature de la série $\sum_n a_n$ de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$.

Afin de se ramener à la série harmonique, que l'on connaît bien, on est tenté par la majoration :

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n} \cdot$$

Malheureusement, (i) ne nous permet pas d'en déduire que $\sum_n a_n$ converge, car $\sum_n 1/n$ diverge ; (ii) ne nous permet pas non plus de conclure, car l'inégalité ci-dessus est dans le mauvais sens. C'est là tout le problème de déterminer la nature d'une série par (i) ou (ii) : si l'on majore son terme général, c'est que l'on parie sur sa convergence, car seul (i) reste alors utilisable ; de même, minorer son terme général revient à parier sur sa divergence. Il s'agit donc de faire le bon choix. En revanche, (iii) permet de simplifier la question — sans prendre parti sur la nature de $\sum_n a_n$ — en la ramenant à la nature d'une série plus simple $\sum_n b_n$. Ainsi, comme $n+\sqrt{n} \sim n$, on a $a_n \sim 1/n$, de sorte que $\sum_n a_n$ est de même nature que $\sum_n 1/n$, autrement dit divergente.
On peut aussi établir ce fait à l'aide de (ii) comme suit : Pour tout $n \geqslant 1$, on a $n+\sqrt{n} \leqslant 2n$, donc

$$a_n \geqslant \frac{1}{2n} \cdot$$

De plus $\sum_n 1/2n$ DV, sinon $\sum_n 1/n$ convergerait par la proposition 9 (v), donc $\sum_n a_n$ DV.

• Déterminons la nature de la série $\sum_n b_n$ de terme général $b_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$, $n \geqslant 1$.

Dans ce cas, il est vain d'essayer de ramener b_n à un terme $c_n \sim b_n$ plus simple, et seul (ii) nous permet de conclure : on a $b_n \geqslant 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\sum_n 1/n$ DV, donc $\sum_n b_n$ DV.

3.2 Critères de d'Alembert et de Cauchy

Théorème 12 (critère de d'Alembert) *Soit* (a_n) *une suite de réels* positifs*. Supposons que ces réels* a_n *soient tous non nuls à partir d'un certain rang et que la suite*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ait une limite $\lambda \in [0, +\infty]$ *quand* n *tend vers l'infini. Alors :*

- $\lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_n a_n$ CV,
- $\lambda > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_n a_n$ DV.

Démonstration Supposons $\lambda < 1$ et fixons arbitrairement un réel $r \in]\lambda, 1[$. En choisissant $\varepsilon = r - \lambda > 0$ dans la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, on obtient un entier k tel que :

$$\forall\, n \geqslant k \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda\right| \leqslant r - \lambda, \quad \text{et donc} \quad \forall\, n \geqslant k \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda \leqslant r - \lambda, \quad \text{soit encore :}$$

$$\forall\, n \geqslant k \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r.$$

Multiplions les $n - k$ inégalités obtenues en remplaçant dans cette dernière n successivement par $k, k+1, k+2, \dots, n-1$; on obtient :

$$\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)\left(\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right) \cdots \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \leqslant r^{n-k},$$

soit, après simplification :

$$\frac{a_n}{a_k} \leqslant r^{n-k}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall\, n \geqslant k \quad a_n \leqslant \frac{a_k}{r^k} \cdot r^n \;;$$

comme le second membre est le terme général d'une série géométrique de raison $r \in]\lambda, 1[$, et par conséquent convergente, la proposition 11 (i) permet de conclure à la convergence de $\sum\limits_n a_n$.

Le cas $\lambda > 1$ se traite de façon analogue. En réécrivant l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \in]1, +\infty]$ sous la forme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda' \in [0, 1[$$

et en procédant comme dans le cas $\lambda < 1$, on obtient $r \in]\lambda', 1[$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\, n \geqslant k \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant r.$$

Multiplions les $n - k$ inégalités obtenues en remplaçant dans cette dernière n successivement par $k, k+1, k+2, \dots, n-1$; on obtient :

$$\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right) \cdots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \leqslant r^{n-k},$$

soit, après simplification :

$$\frac{a_k}{a_n} \leqslant r^{n-k}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall\, n \geqslant k \quad a_n \geqslant a_k r^{k-n} \;;$$

le second membre est le terme général d'une série géométrique de raison $r^{-1} > 1$, qui est donc divergente. La proposition 11 (ii) permet d'en déduire la divergence de $\sum\limits_n a_n$.

□

Exemple La série de terme général $a_n = (9/10)^n \, n^{1000}$ est convergente puisque a_{n+1}/a_n tend vers $9/10$ quand $n \to +\infty$. Le calcul numérique de la suite (a_n) est amusant : en effet ses premiers termes croissent très vite ; ce n'est qu'à partir d'un rang élevé qu'elle se décide à tendre vers 0. Cela illustre bien le premier énoncé de la proposition 9 (ainsi que les dangers de l'utilisation de la calculette...).

Le critère de d'Alembert a le frère aîné suivant.

Théorème 13 (critère de Cauchy) *Soit* (a_n) *une suite de réels* positifs. *Supposons que la suite* $(a_n^{1/n})$ *ait une limite* $\lambda \in [0, +\infty]$ *quand* n *tend vers l'infini. Alors :*

- $\lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n$ CV,
- $\lambda > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n$ DV.

Démonstration Supposons $\lambda < 1$ et fixons arbitrairement un réel $r \in]\lambda, 1[$. En choisissant $\varepsilon = r - \lambda > 0$ dans la définition de $\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \lambda$, on obtient un entier k tel que :

$$\forall\, n \geqslant k \quad \left|a_n^{1/n} - \lambda\right| \leqslant r - \lambda, \quad \text{et donc} \quad \forall\, n \geqslant k \quad a_n^{1/n} - \lambda \leqslant r - \lambda, \quad \text{soit encore :}$$

$$\forall\, n \geqslant k \quad a_n \leqslant r^n.$$

Le second membre de cette dernière est le terme général d'une série géométrique convergente ; la proposition 11 (i) entraîne donc la convergence de $\sum_n a_n$.

Le cas $\lambda > 1$ se traite de façon analogue. En réécrivant l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \lambda \in]1, +\infty]$ sous la forme : $\lim_{n\to+\infty} a_n^{-1/n} = \lambda' \in [0, 1[$ et en procédant comme dans le cas $\lambda < 1$, on obtient $r \in]\lambda', 1[$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall\, n \geqslant k \quad a_n^{-1} \leqslant r^n$, soit encore :

$$\forall\, n \geqslant k \quad a_n \geqslant r^{-n}.$$

Le second membre de cette dernière est le terme général d'une série géométrique de raison $r^{-1} > 1$, et par conséquent divergente. Ainsi, la proposition 11 (ii) entraîne la divergence de $\sum_n a_n$. □

Remarques • Lorsque la limite de l'un des deux critères ci-dessus : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ou $\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n}$ vaut 1, il se peut tout aussi bien que $\sum_n a_n$ CV ou $\sum_n a_n$ DV. En effet, la série harmonique $\sum_n n^{-1}$ vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{-1}}{n^{-1}} = \lim_{n\to+\infty} (n^{-1})^{1/n} = 1$$

et diverge, comme on l'a vu haut. Mais d'autre part, la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ vérifie aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = 1$$

et converge, car :

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1},$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

• Le critère de Cauchy est plus fort que celui de d'Alembert en ce sens que chaque fois que ce dernier permet de conclure, le premier le permet aussi. Cela résulte du fait suivant, qu'on ne démontrera pas ici :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \lambda.$$

3.3 Comparaison d'une série à une intégrale impropre

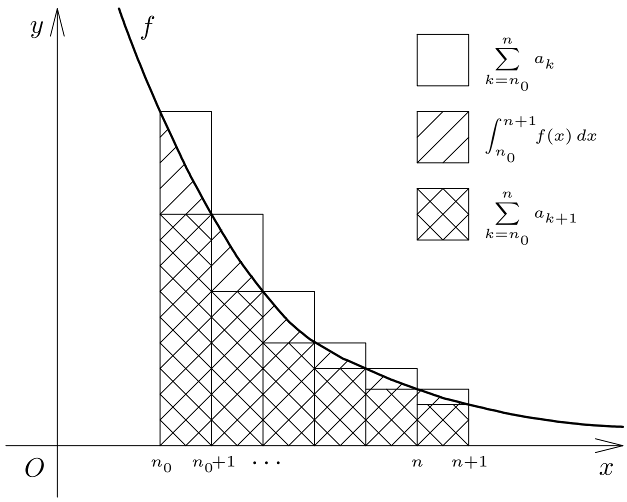
Proposition 14 *Soit* $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ $(n_0 \in \mathbb{N})$ *une fonction continue* décroissante. *Alors la série de terme général* $a_n = f(n)$ *est de même nature que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Démonstration Sur chaque intervalle $[k, k+1]$, on a : $a_{k+1} \leqslant f(x) \leqslant a_k$, d'où :

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\,dx \;\leqslant\; \int_k^{k+1} f(x)\,dx \;\leqslant\; \int_k^{k+1} a_k\,dx \;=\; a_k,$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_{k+1} \;\leqslant\; \sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \;\leqslant\; \sum_{k=n_0}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_{k+1} \;\overset{(\dagger)}{\leqslant}\; \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx \;\overset{(\ddagger)}{\leqslant}\; \sum_{k=n_0}^{n} a_k.$$



Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, i.e. $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{n_0}^{t} f(x)\,dx = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,dx = +\infty$. Il s'ensuit par l'inégalité ($\ddagger$) et le théorème 7 (ii) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k = +\infty$, autrement dit $\sum_n a_n$ DV.

Si $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, i.e. $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = c \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité ($\dagger$) entraîne pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k \;=\; a_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \;\leqslant\; a_{n_0} + \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \;\leqslant\; a_{n_0} + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; a_{n_0} + c$$

et par le théorème 10, $\sum_n a_n$ CV.

□

Exemple fondamental : La série de Riemann $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \leqslant 0$, alors on n'a pas : $\lim n^{-\alpha} = 0$ et $\sum_n n^{-\alpha}$ DV d'après la proposition 1 (ii).
- Si $\alpha > 0$, alors la fonction $f(x) = x^{-\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ et la proposition précédente permet d'en déduire que $\sum_n n^{-\alpha}$ CV ssi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, autrement dit ssi $\alpha > 1$.

On a en résumé :

Proposition 15 *Nature de la série de Riemann. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:* $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\iff \alpha > 1.$

Remarque Cette proposition (dont la divergence de la série harmonique est le cas particulier $\alpha = 1$) est d'autant plus importante que les critères de d'Alembert et de Cauchy sont impuissants à l'établir. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)^\alpha}{1/n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{1/n} = 1.$$

4 Séries absolument convergentes

Définition Soit (a_n) une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série de terme général a_n est *absolument convergente* si la série de terme général (positif !) $|a_n|$ converge.

Théorème 16 *Toute série absolument convergente est convergente et l'on a alors :*

$$\Big|\sum_{n\geqslant 0} a_n\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n|.$$

Démonstration Voyons d'abord le cas des séries à termes réels. À partir de la suite de nombres réels (a_n), on définit deux suites de nombres *positifs* de la façon suivante :

$$a_n^+ = \max(a_n, 0); \quad a_n^- = -\min(a_n, 0).$$

Les inégalités évidentes $a_n^+ \leqslant |a_n|$, $a_n^- \leqslant |a_n|$ et l'hypothèse $\sum_n |a_n|$ CV entraînent par la proposition 11 (i) que les séries de termes généraux a_n^+ et a_n^- convergent ; la relation $a_n = a_n^+ - a_n^-$ et la proposition 9 permettent d'en déduire $\sum_n a_n$ CV.
Si (a_n) est une suite de nombres complexes, les inégalités $|\mathfrak{Re}\, a_n| \leqslant |a_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, a_n| \leqslant |a_n|$ montrent toujours en vertu de la proposition 11 (i) que les séries de termes généraux *réels* $\mathfrak{Re}\, a_n$ et $\mathfrak{Im}\, a_n$ sont absolument convergentes, et donc convergentes selon le cas précédent. On conclut par la proposition 9 grâce à l'égalité $a_n = \mathfrak{Re}\, a_n + i\, \mathfrak{Im}\, a_n$.

□

La réciproque de ce dernier théorème est fausse ; la proposition suivante permet en effet d'établir la convergence de séries qui ne sont pas absolument convergentes.

Proposition 17 *Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite* décroissante *de nombres positifs telle que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Alors la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.*

Démonstration Soit $s_n = \sum_{i=n_0}^n (-1)^n a_n$ la suite des sommes partielles et (u_n), (v_n) les suites définies par : $u_n = s_{2n+1}$ et $v_n = s_{2n}$. On a :

- $u_n = s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geqslant s_{2n-1} = u_{n-1}$,
- $v_n = s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leqslant s_{2n-2} = v_{n-1}$,

autrement dit, (u_n) est croît et (v_n) décroît. De plus, $u_n = s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leqslant s_{2n} = v_n$, donc pour tout $n \geqslant n_0$: $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ainsi (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par

u_0. Les suites (u_n) et $(-v_n)$ sont donc croissantes et majorées. Le théorème 8 entraîne qu'elles convergent, mettons vers $l, -l'$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on a :

$$l - l' = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}(-a_{2n+1}) = 0$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = l = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

□

Exemple de série convergente non abs$^{\underline{t}}$ convergente : la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

La suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ CV d'après la proposition 8. Afin d'éviter des expressions abstruses, reprenons temporairement la notation naïve de notre premier exemple, selon laquelle $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ désigne la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n$.

Il est possible de démontrer que la somme de la série harmonique alternée vaut $\ln 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \ln 2 \ \ (< 1).$$

Cependant, pour les séries non absolument convergentes, l'ordre de sommation des termes est crucial ; on a par exemple :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3}}_{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}_{2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11}}_{2} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}\ln 2 \ \ (> 1)$$

et plus généralement :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}}_{k} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+3} + \cdots + \frac{1}{4k-1}}_{k} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{2}\ln k + \ln 2.$$

On a même :

$$\underbrace{1}_{1} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}_{2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}}_{3} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}}_{4} - \frac{1}{8} + \cdots = +\infty.$$

(Chacune de ces relations exprime la limite des sommes partielles de son membre gauche.) En fait, pour toute série réelle convergente mais non absolument convergente, il est toujours possible de réordonner les termes de façon à faire converger la série vers n'importe quel réel ou la faire diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$! C'est pourquoi les séries convergentes non absolument convergentes sont parfois appelées *semi-convergentes*.

En revanche, les sommes des séries absolument convergentes résistent à toutes sortes de manipulations intuitivement raisonnables. On peut, par exemple, développer le produit de deux séries absolument convergentes : $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ et $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ en regroupant les monômes $a_p b_q$ selon la somme $p + q$ des rangs de leurs facteurs a_p et b_q :

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) = \underbrace{a_0 b_0}_{p+q=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{p+q=1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{p+q=2} + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}_{p+q=n} + \cdots$$

Formellement :

Proposition 18 *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites numériques. On pose :*

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = \sum_{p+q=n} a_pb_q.$$

Si les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, il en est de même pour la série de terme général c_n ; on a alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} b_n\Big).$$

Démonstration Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

$$A_n^* = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad B_n^* = \sum_{k=0}^{n} |b_k|, \qquad C_n^* = \sum_{k=0}^{n} |c_k|.$$

Par hypothèse, il existe $A, B, A^*, B^* \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A, \qquad \lim_{n\to+\infty} B_n = B, \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n^* = A^*, \qquad \lim_{n\to+\infty} B_n^* = B^*,$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n^* \leqslant A^*, \qquad B_n^* \leqslant B^*.$$

On a :

$$C_n^* = \sum_{k=0}^{n} |c_k| = \sum_{k=0}^{n} \Big|\sum_{p+q=k} a_pb_q\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} |a_pb_q| = \sum_{p+q\leqslant n} |a_pb_q|,$$

où la dernière somme doit s'entendre comme la somme constituée d'un terme $t_{p,q} = |a_pb_q|$ pour chaque couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q \leqslant n$. Comme tous ces couples (p,q) vérifient évidemment $p \leqslant n$, $q \leqslant n$, on ne fait que rajouter des termes positifs $t_{p,q}$ à cette dernière somme lorsqu'on la remplace par $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} t_{p,q}$, d'où :

$$C_n^* \leqslant \sum_{p+q\leqslant n} t_{p,q} \leqslant \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} t_{p,q} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} |a_p|.|b_q| = \sum_{p=0}^{n}\Big(|a_p|\sum_{p=0}^{n}|b_q|\Big) = \sum_{p=0}^{n} |a_p|.B_n^* = A_n^*B_n^*.$$

On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n^* \leqslant A^*B^*,$$

et donc par la proposition 10, la suite (C_n^*) converge ; autrement dit la série de terme général c_n converge absolument.

Il reste à établir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} C_n = AB$. On a :

$$C_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} c_k = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{p+q=k} a_pb_q = \sum_{p+q\leqslant 2n} a_pb_q,$$

où la dernière somme est constituée d'un terme $u_{p,q} = a_p b_q$ pour chaque couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q \leqslant 2n$. Ces couples se répartissent en trois ensembles : $\{(p,q)\ ;\ 0 \leqslant p \leqslant n,\ 0 \leqslant q \leqslant n\}$, $\{(p,q)\ ;\ n{+}1 \leqslant p \leqslant 2n,\ 0 \leqslant q \leqslant 2n{-}p\}$ et $\{(p,q)\ ;\ n{+}1 \leqslant q \leqslant 2n,\ 0 \leqslant p \leqslant 2n{-}q\}$. Il s'ensuit :

$$C_{2n} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q} + \sum_{p=n+1}^{2n}\sum_{q=0}^{2n-p} u_{p,q} + \sum_{q=n+1}^{2n}\sum_{p=0}^{2n-q} u_{p,q}.$$

De plus, on a :

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_p.b_q = \sum_{p=0}^{n}\Big(a_p \sum_{p=0}^{n} b_q\Big) = \sum_{p=0}^{n} a_p.B_n = A_n B_n,$$

$$\Big|\sum_{p=n+1}^{2n}\sum_{q=0}^{2n-p} u_{p,q}\Big| \leqslant \sum_{p=n+1}^{2n}\sum_{q=0}^{2n-p} |a_p b_q| = \sum_{p=n+1}^{2n} |a_p| \sum_{q=0}^{2n-p} |b_q| \leqslant \sum_{p=n+1}^{2n} |a_p| B^* = (A^*_{2n} - A^*_n)B^*,$$

et de même :

$$\Big|\sum_{q=n+1}^{2n}\sum_{p=0}^{2n-q} u_{p,q}\Big| \leqslant \sum_{q=n+1}^{2n}\sum_{p=0}^{2n-q} |a_p b_q| = \sum_{q=n+1}^{2n} |b_q| \sum_{p=0}^{2n-q} |a_p| \leqslant \sum_{q=n+1}^{2n} |b_q| A^* = (B^*_{2n} - B^*_n)A^*.$$

On en déduit :

$$|C_{2n} - A_n B_n| \leqslant \Big|\sum_{p=n+1}^{2n}\sum_{q=0}^{2n-p} u_{p,q}\Big| + \Big|\sum_{q=n+1}^{2n}\sum_{p=0}^{2n-q} u_{p,q}\Big| \leqslant (A^*_{2n} - A^*_n)B^* + (B^*_{2n} - B^*_n)A^*,$$

et puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} [(A^*_{2n} - A^*_n)B^* + (B^*_{2n} - B^*_n)A^*] = (A^* - A^*)B^* + (B^* - B^*)A^* = 0$, cela établit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(C_{2n} - A_n B_n) = 0$. Ainsi, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \lim\limits_{n\to+\infty} C_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(A_n B_n) = AB$. □

5 Exemples et contre-exemples

a) Série $\sum\limits_n a_n$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\sum\limits_n a_n$ DV.

- La plus célèbre : $\sum\limits_n \dfrac{1}{n}$ (série harmonique).
- Plus généralement : $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^\alpha},\ \ 0 < \alpha \leqslant 1$ (série de Riemann divergente).

b) $\sum\limits_n a_n$, $\sum\limits_n b_n$ telles que : $\sum\limits_n a_n$ CV et $\sum\limits_n b_n$ CV mais $\sum\limits_n a_n b_n$ DV et $\sum\limits_n \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$ DV.

$\rightsquigarrow\ \ a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

c) $\sum\limits_n a_n$, $\sum\limits_n b_n$ telles que : $a_n \sim b_n$ quand $n \to +\infty$, $\sum\limits_n a_n$ CV et $\sum\limits_n b_n$ DV.

$\rightsquigarrow\ \ a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}\ \ \Big(\sum\limits_n (a_n - b_n)$ DV car $a_n - b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} \sim \dfrac{1}{n}\Big)$.

d) $\sum\limits_n (-1)^n u_n$ telle que : $\forall n\ \ u_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\sum\limits_n (-1)^n u_n$ DV.

$\rightsquigarrow\ \ (-1)^n u_n = b_n$ comme défini dans c).