UNIVERSITÉ PARIS 7
DENIS DIDEROT

MI3

Algèbre et analyse fondamentales I

CHAPITRE II

SÉRIES DE FONCTIONS

année 2008-2009

Auteurs : Gérard Bourdaud
Thierry Joly

Département de Formation
de 1er Cycle de Sciences Exactes

SÉRIES DE FONCTIONS

Plan du chapitre :

SÉRIES DE FONCTIONS

1 Séries de fonctions

1.1 Théorèmes fondamentaux

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions, définies sur un même ensemble E, à valeurs réelles ou complexes. Soit A une partie de E ; on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement sur* A si, quel que soit $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. La fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

est alors définie sur A. Dès lors, on souhaite en savoir un peu plus sur la fonction f : est-elle continue ? dérivable ? peut-on dériver ou intégrer f comme s'il s'agissait d'une somme finie de fonctions ?

Définition Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble A. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement* sur A s'il existe une suite positive $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

1. $|f_n(x)| \leqslant a_n$ pour tout entier n et tout $x \in A$,
2. la série $\sum a_n$ est convergente.

Théorème 1 *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit c un élément de $[-\infty, +\infty]$. On suppose que c est un élément de I ou une extrémité de I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I et si, pour tout n, la fonction f_n admet une limite finie u_n en c, alors la série $\sum u_n$ est convergente et l'on a*

$$\lim_{x\to c} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \,.$$

Démonstration En faisant tendre x vers c dans l'inégalité $|f_n(x)| \leqslant a_n$, on obtient $|u_n| \leqslant a_n$; le critère de comparaison montre alors que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Pour établir la seconde assertion, on se donne un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Puisque la série $\sum a_n$ est convergente, la proposition 9 (iii) du chapitre I nous dit qu'on peut trouver un entier $n \geqslant 0$ tel que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j < \frac{\varepsilon}{4} \,.$$

Considérons la fonction $g(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$; puisqu'il s'agit d'une somme finie, une propriété banale des limites de fonctions nous donne

$$\lim_{x\to c} g(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j \,.$$

Ainsi, dès que x est assez proche de c, on a

$$\big|g(x) - \sum_{j=0}^{n} u_j\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned}\big|f(x) - \sum_{j=0}^{\infty} u_j\big| &\leqslant \big|\sum_{j=0}^{n}\big(f_j(x) - u_j\big)\big| + \big|\sum_{j=n+1}^{\infty}\big(f_j(x) - u_j\big)\big| \\ &\leqslant \big|g(x) - \sum_{j=0}^{n} u_j\big| \,+\, 2\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j < \varepsilon \,.\end{aligned}$$

□

Théorème 2 *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si chaque fonction f_n est continue sur I, la fonction*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

est définie et continue sur I.

Démonstration Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème précédent.

□

Théorème 3 *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, b]$ et si chaque fonction f_n est continue sur $[a, b]$, on a la propriété d'* intégration terme à terme :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx \,.$$

Démonstration S'agissant de sommes finies, on a

$$\sum_{j=0}^{n} \int_a^b f_j(x)dx = \int_a^b \Big(\sum_{j=0}^{n} f_j(x)\Big)dx$$

quel que soit l'entier n ; on en déduit

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{n}\Big(\int_a^b f_j(x)dx\Big)\right| &= \left|\int_a^b \Big(\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)\Big)dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(x)|\,dx \leqslant (b-a)\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \,,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \Big(\int_a^b f_j(x)dx\Big) = \int_a^b f(x)dx \,.$$

□

Théorème 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur I, telle que*

1. *pour tout entier n, f_n est continûment dérivable sur I,*
2. *la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur I,*
3. *il existe $x_0 \in I$ tel que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge.*

Alors la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est définie et continûment dérivable sur I ; de plus on a la propriété de dérivation terme à terme *:*

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)\,.$$

Démonstration Posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$$

et appliquons le théorème 3 à la série de fonctions $\sum f'_n$; on obtient

$$\forall x \in I \quad \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) \;;$$

l'égalité $f_n(x) = (f_n(x) - f_n(x_0)) + f_n(x_0)$, la condition (3) et la proposition 9 (iv) du chapitre I impliquent la convergence de la série $\sum f_n(x)$ et la relation

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\,.$$

Le théorème fondamental de l'analyse permet de conclure.

□

1.2 Exemples

Exemple 1 Il a pour but de montrer que la convergence simple d'une série de fonctions $\sum f_n$ ne suffit pas pour garantir la continuité de la fonction somme, même si chaque fonction f_n est continue. Soit

$$f_n(x) = x(1-x)^n \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Montrons que la série $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$. Pour $0 < x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant 1 - x < 1$: la série $\sum f_n(x)$ est une série géométrique convergente. On a $f_n(0) = 0$ quel que soit n : la série $\sum f_n(0)$ est donc trivialement convergente. Calculons la fonction somme $f(x)$. On a évidemment $f(0) = 0$ et, pour $x > 0$,

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = x\,\frac{1}{1-(1-x)} = 1\,;$$

la fonction f est discontinue en 0.

Nous allons expliquer ce phénomène en montrant explicitement que la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$. Pour cela, on calcule

$$a_n = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)|\,.$$

On note que la fonction f_n est positive et — en la dérivant — qu'elle atteint son maximum pour $x = \frac{1}{n+1}$; cela donne

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} .$$

Si la série $\sum f_n$ convergeait normalement sur $[0,1]$, la série numérique $\sum a_n$ serait convergente ; mais cela est impossible, puisque

$$a_n \sim \frac{1}{en} \quad (n \to \infty) .$$

Exemple 2 On se propose d'étudier la série de fonctions $\sum f_n$, où

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

et de calculer sa somme $f(x)$, quand elle est définie. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} |x|\frac{n}{n+1} = |x| ;$$

le critère de d'Alembert montre que la série $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,+1[$. Par contre, elle ne converge pas normalement sur cet intervalle, puisque

$$\sup_{x\in\,]-1,+1[} |f_n(x)| = \frac{1}{n} ,$$

terme général d'une série divergente. Fixons le nombre $r \in]0,1[$; on a

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall x \in \ [-r,r] \quad |f_n'(x)| \leqslant r^{n-1} ,$$

terme général d'une série géométrique convergente ; la série de fonctions $\sum f_n'$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[-r,r]$. Le théorème 4 entraîne la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle $[-r,r]$. La dérivabilité étant une propriété locale, le raisonnement précédent montre en fait que f est dérivable sur tout l'intervalle ouvert $]-1,+1[$, ainsi que la relation

$$\forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} .$$

Pour obtenir $f(x)$, il suffit de prendre une primitive de $(1-x)^{-1}$, en notant que f s'annule en 0 ; il vient

$$\forall x \in]-1,+1[\qquad f(x) = -\log(1-x) .$$

Exemple 3 Étudions la série

$$\sum \frac{x^n}{n(n+1)} . \tag{1}$$

Pour $|x| > 1$, les propriétés classiques de la fonction exponentielle donnent

$$\left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right| = \frac{e^{n\log|x|}}{n(n+1)} \to +\infty ;$$

puisque son terme général ne tend pas vers 0, la série (1) est divergente. Pour $|x| \leqslant 1$, on a

$$\left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n(n+1)} ;$$

or la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, puisque son terme général est équivalent à $1/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente. La série de fonctions (1) est normalement convergente sur $[-1,+1]$; cela implique que sa somme f est définie et continue sur cet intervalle. La suite du travail va consister à calculer $f(x)$ pour $-1 < x < +1$, puis à tirer parti de la continuité de f pour obtenir $f(\pm 1)$. La relation

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et le calcul de l'exemple 2 donnent, pour $-1 < x < +1$, $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= -\log(1-x) - \frac{1}{x}\big(-\log(1-x) - x\big) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\log(1-x) + 1\,. \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers -1, on obtient $f(-1) = 1 - 2\log 2$. Pour obtenir la valeur de f en 1, on utilise la propriété suivante de la fonction logarithme :

$$\lim_{t\to 0+} t\log t = 0\,;$$

il vient alors $f(1) = 1$. Est-ce étonnant de trouver une valeur aussi simple ? En fait on peut l'obtenir d'une manière plus directe :

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Exemple 4 Nous allons voir que la *fonction zeta de Riemann*,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

est définie et indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$. La convergence simple de la série est une propriété connue des séries de Riemann. Pour établir l'existence de la dérivée $\zeta^{(k)}$, il suffit de fixer $\alpha > 1$ et de montrer la convergence normale de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{n^x}\right)$$

sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$; or on a

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{n^x}\right)\right| = n^{-x}\log^k n \leqslant n^{-\alpha}\log^k n\,.$$

On se fixe alors un réel $\alpha' \in]1,\alpha[$. On a $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha'-\alpha}\ln^k n = 0$ d'où $n^{-\alpha}\ln^k n \leqslant n^{-\alpha'}$, à partir d'un certain rang, ce qui permet de conclure.

2 Séries entières

Définition On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\,,$$

où z est une variable complexe (ou réelle) et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique.

2.1 Convergence simple – Rayon de convergence

Remarque Pour tout suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs complexes, l'ensemble I des réels $r\geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée *est toujours un intervalle de la forme* $I=[0,R]$ *ou* $I=[0,R[$ $(R\in[0,+\infty])$. En effet, on a évidemment $0\in I$. De plus, si $r\in I$ et $r'<r$ $(r\in\mathbb{R}^+)$, alors la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée par un certain $M\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\geqslant 0$: $|a_n r'^n|\leqslant|a_n r^n|\leqslant M$, autrement dit la suite $(a_n r'^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée par le même $M\in\mathbb{R}$, d'où $r'\in I$. On vient d'établir :

$$\forall r\geqslant 0\quad \forall r'\geqslant 0\quad (r\in I\quad \text{et}\quad r'<r\quad\Rightarrow\quad r'\in I).$$

Il s'ensuit que I est nécessairement un intervalle de l'une des formes mentionnées plus haut.

Définition On appelle *rayon de convergence* d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ l'unique $R\in[0,+\infty]$ tel que l'ensemble I des réels $r\geqslant 0$ pour lesquels la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ait l'une des formes :

$$I=[0,R]\quad \text{ou}\quad I=[0,R[.$$

Proposition 5 *Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, alors :*

- *la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$,*
- *la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>R$.*

Démonstration Lorsque $|z|<R$, on choisit r tel que $|z|<r<R$. Par définition du rayon de convergence R, la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, mettons $|a_n r^n|\leqslant M$. Il s'ensuit pour tout n :

$$|a_n z^n| = |a_n r^n|\cdot\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leqslant M\left(\frac{|z|}{r}\right)^n ;$$

comme la série géométrique :

$$\sum_{n\geqslant 0} M\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

est convergente, cela établit l'absolue convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Lorsque $|z|>R$, la suite $(a_n|z|^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée par définition du rayon de convergence R. Comme $\bigl|a_n|z|^n\bigr| = |a_n z^n|$, cela signifie que la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée ; en particulier, on n'a pas : $\lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

□

Il résulte de cette proposition que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est *l'unique* $R\in[0,+\infty]$ tel que :

- Si $|z|<R$, alors $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge,
- Si $|z|>R$, alors $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ diverge.

Un moyen de déterminer R est donc d'étudier la nature de la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ selon les valeurs de $|z|$ à l'aide du critère de d'Alembert ou de celui de Cauchy.

Exemples • $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$. Utilisons le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right|^{1/n} = |z| \lim_{n\to+\infty} n^{-1/n} = |z|.$$

Ainsi, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{z^n}{n}\right|$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. En vertu de ce qui précède, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$ ne peut être que $R = 1$.

• $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$. Utilisons le critère de d'Alembert. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \bigg/ \left|\frac{z^n}{n^2}\right|\right) = |z| \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |z|.$$

Ainsi, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{z^n}{n^2}\right|$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. En vertu de ce qui précède, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n^2}$ ne peut être que $R = 1$.
Remarquons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, cette série entière est encore absolument convergente, puisque $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

• $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, où $a_n = \frac{1}{n!}$ si n est impair et $a_n = 0$ si n est pair. On ne peut pas appliquer directement le critère de d'Alembert à la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$. En effet, l'expression $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}$ n'a aucun sens, car les termes $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}$ où n est pair ne sont pas définis. Pour contourner cette difficulté, il suffit d'effectuer le changement d'indice $n = 2k + 1$. Comme $a_n = 0$ pour tous les n pairs, les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k+1} z^{2k+1}$ sont de même nature et l'on peut désormais appliquer le critère de d'Alembert à la série de terme général $b_k = |a_{2k+1} z^{2k+1}|$:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{|a_{2k+3} z^{2k+3}|}{|a_{2k+1} z^{2k+1}|} = \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+3)},$$

donc $\lim_{n\to+\infty} b_{k+1}/b_k = 0$ pour tout $z \neq 0$. Ainsi, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} |a_{2k+1} z^{2k+1}|$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ne peut être que $R = +\infty$.

• $\sum_{k\geqslant 1} c_k z^k$, où $c_k = 1$ si k est un carré et $c_k = 0$ sinon.
Là encore, il est nettement recommandé d'effectuer un changement d'indice, remplaçant ainsi la série $\sum_{k\geqslant 1} c_k z^k$ par la série $\sum_{n\geqslant 1} z^{n^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|z^{n^2}\right|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} |z|^n = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{si } |z| < 1, \\ +\infty & \text{si } |z| > 1. \end{array}\right.$$

Ainsi, selon le critère de Cauchy, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} \left|z^{n^2}\right|$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$ ne peut donc être que $R = 1$.

Remarquons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, cette série entière est divergente, puisqu'alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|z^{n^2}\right| = 1 \neq 0$.

Définition Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon R — à savoir $D(0,R) = \{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R \,\}$ — est appelé *disque de convergence* de la série entière.

Remarque En dépit de cette terminologie, la série entière peut aussi converger pour des points du cercle frontière $\mathcal{C}(0,R) = \{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R \,\}$. En effet, selon la proposition 5, l'ensemble $\mathcal{D}$, où la série entière converge simplement, se doit seulement de vérifier :

$$D(0,R) \ \subseteq\ \mathcal{D}\ \subseteq\ D(0,R) \cup \mathcal{C}(0,R).$$

Or tout peut arriver sur $\mathcal{C}(0,R)$, comme le montrent les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} z^{n^2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n^2}$, des exemples ci-dessus qui sont toutes de rayon de convergence 1 :

- $\sum\limits_{n\geqslant 1} z^{n^2}$ DV pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1)$ (car on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n^2} = 0$)
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ DV pour $z = 1 \in \mathcal{C}(0,1)$ (série harmonique)
CV pour $z = -1 \in \mathcal{C}(0,1)$ (série harmonique alternée)
- $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n^2}$ CV pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1)$.

2.2 Opérations sur les séries entières

2.2.1 Somme – Produit

Proposition 6 *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, sont au moins égaux à $\min(R,R')$; on a de plus pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \min(R,R')$:*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n\,,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Démonstration La convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) z^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R,R')$ et les relations ci-dessus sont des conséquences immédiates des propositions 9 (iv) et 18 du chapitre I. Il s'ensuit naturellement que les rayons de convergence de ces séries entières valent au moins $\min(R,R')$.

$\square$

Remarque La multiplication d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (de rayon de convergence R) par une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ est un cas particulier de la seconde relation : il suffit de prendre $b_0 = \lambda$,

$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \ldots = 0$. (Dans ce cas, le rayon de convergence de la série produit $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n$ est alors exactement R).

Exemples Les définitions les plus usuelles des fonctions exp, cos et sin *sur le plan complexe* $\mathbb{C}$ sont :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Le bien-fondé de ces définitions sera mieux compris dans les cours d'analyse du niveau L3. Pour l'instant, remarquons seulement que ces trois séries entières ont bien pour rayon de convergence $R = +\infty$. (Cela se vérifie facilement comme dans les exemples plus haut à l'aide du critère de d'Alembert.) À l'aide de la proposition 6, on en déduit pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $\cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \exp(iz).$

- Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$: $\exp(az).\exp(bz) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, avec :

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{a^p}{p!} \frac{b^q}{q!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{a^p}{p!} \frac{b^{n-p}}{n-p!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p a^p b^{n-p} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

Ainsi,

$$\exp(az).\exp(bz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(a+b)z]^n}{n!} = \exp[(a+b)z].$$

En particulier, on a pour $z = 1$:

$$\exp a.\exp b = \exp(a+b).$$

2.2.2 Dérivation – Intégration

Dans toute la suite de ce chapitre, on ne considérera plus que des séries entières d'une variable réelle x :

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n,$$

où les coefficients a_n sont toujours a priori des nombres complexes. En vertu de la section 2.1, si $R \in [0, +\infty]$ est le rayon de convergence de cette série entière, alors l'ensemble de convergence $\mathcal{D}$ de cette série est tel que :

$$]-R, R[\ \subset \mathcal{D} \subset [-R, R].$$

Proposition 7 *On suppose que la série entière* $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ *a un rayon de convergence* R *non nul. Alors cette série converge normalement sur l'intervalle* $[-r, r]$*, quel que soit* $r \in]0, R[$*, et la fonction*

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n \tag{2}$$

est définie et continue sur l'intervalle $]-R, R[$*.*

Démonstration On a $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-r, r]$. Si $r < R$, la proposition 5 nous dit que la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente. Ceci établit la première assertion. La seconde résulte du théorème 2, et du caractère local de la continuité.

□

Proposition 8 *Les séries entières* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ *ont toujours un même rayon de convergence R. De plus, lorsque* $R > 0$*, la fonction* f *définie par (2) est dérivable sur* $]-R, R[$ *et*

$$\forall x \in]-R, R[\quad f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}\,. \tag{3}$$

Ainsi, les séries entières — qui sont une généralisation des polynômes — se dérivent aussi facilement que ces derniers ! En utilisant de façon répétée cette dernière proposition, on déduit facilement les corollaires suivants.

Corollaire 1 *Sous les hypothèses de la proposition 7, la fonction* f *a pour primitives sur l'intervalle* $]-R, R[$ *les fonctions :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (C \in \mathbb{C}).$$

Démonstration En effet, soit R' le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\,. \tag{4}$$

En vertu de la proposition 8, on a $R = R'$ et, en désignant par $F(x)$ la somme de la série (4), on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-R', R'[$. Comme deux primitives de f sur $]-R, R[$ ne diffèrent que d'une constante, le corollaire s'ensuit.

□

Corollaire 2 *Sous les hypothèses de la proposition 7, la fonction* f *est indéfiniment dérivable sur* $]-R, R[$ *et, pour tout* $x \in]-R, R[$ *et tout* $k \in \mathbb{N}$ *:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geqslant k} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Démonstration Il suffit d'appliquer k fois de suite la proposition 8.

□

Corollaire 3 *Sous les hypothèses de la proposition 7, on a :* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ *pour tout entier* $n \geqslant 0$.

Démonstration En vertu du corollaire 2, on a bien : $f^{(k)}(0) = k(k-1)\ldots 2.1\, a_k = k! a_k$.

□

Corollaire 4 *Principe d'identification. Soit*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n,$$

deux séries entières convergeant sur $]-r, r[$ *avec* $r > 0$*, et soit* $f(x)$ *et* $g(x)$ *leurs sommes respectives. Si l'on a* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in]-r, r[$*, alors on a* $a_n = b_n$ *quel que soit l'entier* n *.*

Démonstration En effet, en vertu du corollaire précédent, on a : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

□

Tous ces corollaires ne font qu'accroître l'analogie entre polynômes et séries entières, et rendent ces dernières d'autant plus faciles à manier. Pourtant, la proposition 8 n'a rien d'évident à priori, car le fait que $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x)$ converge pour tout $x \in]-r, r[$ n'implique pas que l'on ait pour $x \in]-r, r[$:

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} P_n'(x),$$

et ce, même lorsque les fonctions P_n sont des polynômes. En effet, choisissons pour tout $n \geqslant 0$: $P_n(x) = x^3(1-x^2)^n$. Si $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, la série $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x)$ est alors géométrique de raison $q = 1-x^2 \in]0, 1[$, d'où : $f(x) = x^3/(1-q) = x^3/x^2 = x$.
De plus, on a évidemment $f(0) = \sum_{n\geqslant 0} 0 = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x) = x.$$

Néanmoins, $P_n'(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car 0 est une racine triple de P_n, et donc :

$$f'(0) = 1 \neq 0 = \sum_{n\geqslant 0} P_n'(0).$$

Démonstration de la proposition 8 Commençons par établir que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Soit R celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, R' celui de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n-1}$, I l'ensemble des $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et I' l'ensemble des $r \geqslant 0$ tels que la suite $(n a_n r^{n-1})_{n\geqslant 0}$ est bornée. Rappelons que, par définition de R et de R', on a : $I = [0, R[$ ou $I = [0, R]$ et de même, $I' = [0, R'[$ ou $I' = [0, R']$.

On ne peut avoir $R < R'$, sinon pour un réel $r \in]R, R'[$ quelconque, la suite $(n a_n r^{n-1})_{n\geqslant 0}$ serait bornée et la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ ne le serait pas, ce qui est absurde, puisque $|a_n r^n| \leqslant r|n a_n r^{n-1}|$. De même, si l'on avait $R' < R$, on pourrait choisir deux réels r, r' tels que $R' < r' < r < R$. La suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ serait bornée, mettons $|a_n r^n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et l'on aurait $\lim_{n\to+\infty} n(r'/r)^{n-1} = 0$ (car $r'/r \in]0, 1[$), donc la suite $(n(r'/r)^{n-1})_{n\geqslant 0}$ serait elle aussi bornée, mettons $|n(r'/r)^{n-1}| \leqslant M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuivrait $|n a_n r'^{n-1}| = r^{-1}|a_n r^n|.|n(r'/r)^{n-1}| \leqslant r^{-1}MM'$. Ainsi, la suite $(n a_n r'^{n-1})_{n\geqslant 0}$ serait bornée, ce qui contredit la relation $R' < r'$. On a donc bien $R = R'$.

Maintenant fixons $r \in]0, R[$. En appliquant la proposition 7 à la série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$, on constate que cette série est normalement convergente sur $[-r, r]$. On peut alors appliquer le théorème 4. Il nous dit que la fonction f est dérivable sur $[-r, r]$ et que l'égalité (3) a lieu sur cet intervalle. En raison du caractère local de la dérivabilité, les mêmes propriétés ont lieu sur l'intervalle $]-R, R[$.

$\square$

2.3 Développements de fonctions en séries entières

Rappel Formule de Taylor-Lagrange en 0 :
Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

Des corollaires de la proposition 8, on déduit aussitôt que si f est la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul :

- f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0,
- les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de f sont précisément les coefficients de la formule de Taylor de f en 0 :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Réciproquement, pour toute fonction f indéfiniment dérivable au voisinage de 0, on peut toujours considérer la série entière :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Cependant, rien n'assure que cette série définisse bien f. Trois "pathologies" peuvent apparaître :

1. que cette série diverge pour tout $x \neq 0$;
2. que cette série converge, mais que l'on ait : $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \neq 0$;
3. que l'on n'ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ que sur un intervalle strictement plus petit que l'ensemble de définition de f.

Les trois exemples suivants illustrent chacune de ces éventualités.

1) Considérons la série de fonctions de terme général $e^{-n} \sin n^2 x$. On a

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{-n} \sin n^2 x) = e^{-n} n^{2k} u_k(n^2 x)\,,$$

où u_k est la fonction $\pm \sin$, si k est pair, la fonction $\pm \cos$ si k est impair ; d'où

$$|e^{-n} n^{2k} u_k(n^2 x)| \leqslant e^{-n} n^{2k}\,.$$

Or $\sum_{n\geqslant 1} e^{-n} n^{2k}$ est une série convergente, puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-(n+1)}(n+1)^{2k}}{e^{-n} n^{2k}} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

La série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d^k}{dx^k}(e^{-n} \sin n^2 x)$$

est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cela montre que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin n^2 x$$

est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$; on a en outre

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{2k} u_k(x)\,,$$

ce qui donne

$$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{2k}\,,$$

si k est impair, $f^{(k)}(0) = 0$ sinon.

Nous allons montrer que la série de Taylor de f en 0, à savoir

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!}\,,$$

diverge pour tout $x \neq 0$; cela revient à prouver que le rayon de convergence de cette série entière est nul, autrement dit, que pour tout $r > 0$, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f^{(k)}(0)|\,\frac{r^k}{k!}$$

est divergente. Raisonnons par l'absurde : si cette série convergeait, il existerait un nombre $C > 0$ tel que

$$\forall K \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{2K+1} |f^{(k)}(0)|\,\frac{r^k}{k!} \leqslant C\,;$$

le premier membre de l'inégalité ci-dessus est

$$\sum_{m=0}^{K} |f^{(2m+1)}(0)|\,\frac{r^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{K}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{2(2m+1)}\right)\frac{r^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{K} e^{-n} n^{2(2m+1)}\,\frac{r^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\,;$$

cela impliquerait, pour tous entiers $K \geqslant 0$, $N \geqslant 1$,

$$C \geqslant \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=0}^{K} e^{-n} n^{2(2m+1)}\,\frac{r^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\,.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, laissons N fixé et faisons tendre K vers l'infini : on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} e^{-n}\sinh n^2 r \leqslant C\,,$$

d'où la convergence de la série de terme général $e^{-n}\sinh n^2 r$; mais c'est impossible, puisque

$$e^{-n}\sinh n^2 r \sim \frac{1}{2} e^{n^2 r - n}\,,$$

qui tend vers l'infini avec n.

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0.$$

Montrons, par récurrence sur n, que l'on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) P_n(x) \quad (x \neq 0), \qquad f^{(n)}(0) = 0,$$

où P_n est un polynôme. Elle est vraie pour $n = 0$ (il suffit de prendre $P_0 = 1$). Supposons la vraie au rang n ; on en déduit pour tout $x \neq 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)P_n(x)\right) = \frac{1}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\big((2-3nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x)\big)\,,$$

or $P_{n+1}(x) = (2 - 3nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x)$ est un polynôme. Dans le cas où $x = 0$, on a :

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{3n+1}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) P_n(x) = 0$$

car :

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{x^{3n+1}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right| = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^{(3n+1)/2}}{e^t} = 0$$

La série entière associée à f est donc trivialement convergente, mais on a pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\, \frac{x^n}{n!} = 0.$$

3) La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ est définie sur $]-1\,,+\infty[$, mais l'égalité $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (*cf plus bas*) n'est pas vérifiée pour $x > 1$.

Concluons par les développements en séries entières de quelques fonctions usuelles (le rayon de convergence R est précisé après chaque formule) *qu'il faut absolument connaître ou savoir retrouver rapidement* :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

Formule du binôme généralisée :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$$

$$(R = 1 \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \quad R = +\infty \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{N})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (R = 1)$$

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R = 1)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R = 1)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R = 1)$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots = x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (R = 1)$$

Les développements de e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ s'obtiennent facilement à partir de la formule de Taylor, car leurs dérivées successives se répètent périodiquement. Par exemple, pour $f(x) = \operatorname{ch} x$, on a : $f^{(2n)}(x) = \operatorname{ch} x$, $f^{(2n+1)}(x) = \operatorname{sh} x$, d'où : $f^{(2n)}(0) = 1$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$. La formule de Taylor à l'ordre $2N$ s'écrit donc :

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\operatorname{sh} \theta x}{(2N+1)!} x^{2N+1} \qquad (\theta \in]0\,,1[).$$

On en déduit :

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \operatorname{ch} x \right| \leqslant |\operatorname{sh} x| \frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!}\,;$$

le second membre de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 quand N tend vers l'infini ; cela établit la convergence de la série du membre gauche et le fait que sa limite est bien $\operatorname{ch} x$.

En remplaçant éventuellement, dans la formule du binôme généralisée, la variable x par $\pm x^2$, celle-ci donne les développements en séries entières des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{1+x}, \qquad \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{1}{1-x^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Tous ces développements ont 1 comme rayon de convergence. En les intégrant à l'aide du Corollaire 1, on obtient les développements respectifs des fonctions :

$$\ln(1+x), \quad \operatorname{Arctg} x, \quad \operatorname{argth} x, \quad \operatorname{Arcsin} x, \quad \operatorname{argsh} x.$$

Enfin, les coefficients de la formule du binôme généralisée sont faciles à retrouver, puisque les dérivées successives de $f(x) = (1+x)^\alpha$ sont bien $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, d'où :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,.$$

Par ailleurs, lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, il s'agit bien des coefficients binômiaux $\mathrm{C}_\alpha^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,.$

En revanche, la validité de cette formule ne se démontre pas facilement à partir de la formule de Taylor :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_N(x)$$

car il est difficile d'établir que son reste $R_N(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-N)\dfrac{(1+\theta x)^{N+1}}{(N+1)!}$ (dans lequel $\theta \in]0, 1[$, rappelons-le, dépend de N) tend bien vers 0 quand $N \to +\infty$.

Il est bien plus commode d'établir cette formule du binôme généralisée en remarquant que $y(x) = (1+x)^\alpha$ est l'unique solution sur $]-1\,,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1+x)y'(x) = \alpha y(x) \tag{5}$$

pour la condition initiale $y(0) = 1$, puis en cherchant une telle solution sous la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. En effet, si y est une solution de (5) sur l'intervalle $]-1\,,1[$ telle que $y(0) = 1$, alors la fonction f définie sur $]-1\,,1[$ par $f(x) = y(x)(1+x)^{-\alpha}$ vérifie pour tout $x \in]-1\,,1[$:

$$f'(x) = y'(x)(1+x)^{-\alpha} - y(x)\alpha(1+x)^{-\alpha-1} = (1+x)^{-\alpha-1}[(1+x)y'(x) - \alpha y(x)] = 0.$$

Ainsi, f est constante sur $]-1\,,1[$ et cette constante vaut $f(0) = y(0)(1+0)^{-\alpha} = 1$, d'où pour tout $x \in]-1\,,1[$: $y(x) = f(x)(1+x)^\alpha = (1+x)^\alpha$.

Maintenant, pour trouver une solution de (5) sous la forme $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, on exprime à partir de cette dernière chaque membre de l'équation comme une série entière, puis on identifie les coefficients des séries trouvées :

$$\begin{aligned}
(1+x)y'(x) &= (1+x)\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n \\
&= \sum_{k\geqslant 0}(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n \quad \text{(on a remplacé l'indice } n \text{ par } k+1\text{, où } k\geqslant 0\text{)} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n \quad \begin{array}{l}\text{(on s'est contenté de rebaptiser } n \text{ l'indice } k \text{ et} \\ \text{de rajouter un terme nul à la seconde somme)}\end{array} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}[(n+1)a_{n+1} + n a_n]x^n
\end{aligned}$$

Pour tout $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, l'équation (5) équivaut donc à :

$$\sum_{n\geqslant 0}[(n+1)a_{n+1} + n a_n]x^n = \sum_{n\geqslant 0} \alpha a_n x^n.$$

En vertu du corollaire 4, cette dernière relation équivaut à son tour à :

$$(n+1)a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n \qquad (n \geqslant 0), \tag{6}$$

soit encore :

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}\, a_n \qquad (n \geqslant 0).$$

Avec la relation $a_0 = y(0) = 1$, ceci définit par récurrence la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$. On trouve :

$$a_0 = 1, \qquad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \geqslant 1).$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors ces coefficients a_n s'annulent à partir du rang $\alpha + 1$ et la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$; sinon, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| = |x|$, on vérifie immédiatement $R = 1$ à l'aide du critère de d'Alembert.

Enfin, comme pour toute série entière $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, (6) équivaut au fait que y soit solution de (1) sur $]-R\,,R[$, la série :

$$y(x) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

déterminée ci-dessus est bien une solution de (5) sur $]-1\,,1[$ telle que $y(0) = 1$. En vertu de la remarque faite plus haut, il ne peut s'agir que de la fonction $y(x) = (1+x)^\alpha$.