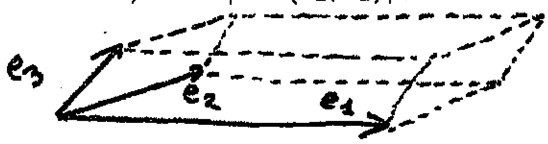
## CHAPITRE 10 INTRODUCTION AUX DÉTERMINANTS

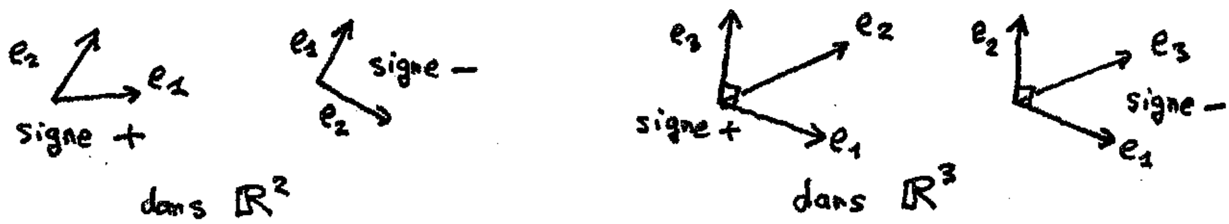
*On définit et étudie dans ce chapitre le déterminant de $n$ vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ dans $\mathbf{R}^n$ ; c'est un nombre réel (ou un élément de $K$ si on travaille dans $K^n$). L'interprétation géométrique de la valeur absolue de ce déterminant est simple et importante : c'est le "volume" du parallélipipède engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ :*


*Dans $\mathbf{R}^2$, on a* $|\det(e_1, e_2)|$ = *aire hachurée*




*Dans $\mathbf{R}^3$, on a* $|\det(e_1, e_2, e_3)|$ = *volume du parallélipipède*

*Avec cette interprétation, il est clair que le déterminant s'annule si et seulement si le parallélipipède est "plat", c'est-à-dire si les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont liés. Le signe du déterminant est plus subtil et correspond à l'orientation de l'espace, concept que nous n'élaborerons pas (voir néanmoins le chapitre suivant) ; voici le signe sur des exemples :*




*Les déterminants fournissent également un critère théorique (et parfois pratique) pour calculer le rang d'une matrice et résoudre certains systèmes linéaires ; c'est l'application qui est exposée ici. La construction du déterminant est assez abstraite et pourra être survolée en première lecture.*

### 10.1 FORMES $n$-LINÉAIRES ALTERNÉES

**Définition:** Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et $n \geq 1$, une application $f : E \times \ldots \times E \to K$ est *$n$-linéaire* si elle est linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire si :
$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha y_i + \beta z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \alpha f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) +$
$\beta f(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Elle est *symétrique* si elle est invariante par permutation des facteurs et *antisymétrique* ou *alternée* si l'interversion de deux facteurs change le signe, c'est-à-dire si

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \forall i < j,\ f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

Remarque : on déduit immédiatement que si $f$ est alternée, alors $f(\ldots, x, \ldots, x, \ldots) = 0$ et puis plus généralement que si $x_i$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Exemples : Le produit scalaire $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est bilinéaire et symétrique. L'application de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ définie par $((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$ est bilinéaire alternée.

Il y a assez peu de formes alternées comme le prouve l'énoncé suivant :

**PROPOSITION:** *Si* $\dim(E) = n$, *l'ensemble des formes* $n$*-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1. Si* $e_1, \ldots, e_n$ *forment une base de* $E$ *et si* $f$ *est une forme* $n$*-linéaire alternée non nulle, alors* $f(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$.

**Démonstration:** (la démonstration n'est compliquée que par les notations) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de $E$ ; écrivons leurs coordonnées dans la base $e_1, \ldots, e_n$ ainsi : $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ et donc

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} \left( \prod_{i=1}^n a_{ij_i} \right) f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$

mais $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$ si l'un des $j_i$ apparaît deux fois et si les $j_i$ sont une permutation de $1, 2, \ldots n$ alors $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \varepsilon f(e_1, \ldots, e_n)$ où $\varepsilon$ est le signe de la permutation en question. En définitive on obtient, en changeant un peu les notations :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left( \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s) \left( \prod_{i=1}^n a_{is(i)} \right) \right) f(e_1, \ldots, e_n)$$

On voit donc que toutes les formes $n$-linéaires alternées sont proportionnelles et que $f$ est non nulle si et seulement si $f(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$. □

Exemple : Si $f$ est $n$-linéaire alternée sur $\mathbf{R}^n$, on peut calculer explicitement :

si $n = 2$ :

$f((a,b),(c,d) = acf((1,0),(1,0)) + adf((1,0),(0,1)) + cbf((01,),(1,0)) + bdf((0,1),(0,1)) = (ad - bc)f((1,0),(0,1))$

Si $n = 3$, on vérifiera par un calcul similaire la "règle de Sarrus" :

$$f((a,b,c),(d,e,f),(g,h,i)) = (aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg) f((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

On définit maintenant le déterminant de $n$ vecteurs dans un espace de dimension $n$.

**Définition:** Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $E$, le *déterminant* par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$ est l'unique application $n$-linéaire alternée $\det : E^n \to K$ telle que $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Exemple : Si $E = K^n$ on sous-entend que l'on a choisi comme base la base canonique. On obtient alors (en écrivant les vecteurs en colonnes) :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

La propriété fondamentale du déterminant est la suivante :

**THÉORÈME:** *Le déterminant de $n$ vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ dans $K^n$ est nul si et seulement si ces vecteurs sont liés.*

**Démonstration:** On a déjà vu que si les vecteurs sont liés le déterminant est nul ; inversement si les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont libres, ils forment une base (puisque $K^n$ est de dimension $n$) et donc, d'après la proposition précédente, $\det(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, . □

Ayant défini le déterminant de $n$ vecteurs de $K^n$, on peut facilement définir le déterminant d'une matrice carrée :

**Définition:** Le déterminant d'une matrice carrée est le déterminant de ses vecteurs colonnes par rapport à la base canonique de $K^n$.

Le théorème précédent se traduit alors ainsi pour les matrices :

**THÉORÈME:** *Soit $A$ une matrice carrée, alors $A$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

**Démonstration:** D'après le théorème précédent, le déterminant de $A$ est non nul si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice $A$ sont linéairement indépendants. Comme les vecteurs colonnes de la matrice $A$ engendre l'image de l'application associée à $A$, cela équivaut à dire que cette application est surjective ou encore qu'elle bijective, ce qui signifie bien que $A$ est inversible. □

**THÉORÈME:** *Le déterminant des matrices est multiplicatif, c'est-à-dire : si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées de même ordre $n$, on a :*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

**Démonstration:** Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de $K^n$, les applications $n$-linéaires alternées de $K^n \times \ldots \times K^n$ vers $K$ définies par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(x_1, \ldots, x_n)$ sont proportionnelles d'après la première proposition de ce chapitre, donc $\det(Ax_1, \ldots, Ax_n) = \alpha \det(x_1, \ldots, x_n)$. En appliquant ceci aux vecteurs de la base canonique on obtient que $\alpha = \det(A)$ et ainsi :

$$\det(Ax_1, \ldots, Ax_n) = \det(A)\det(x_1, \ldots, x_n)$$

Maintenant on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\det(AB)\det(x_1, \ldots, x_n) &= \det(ABx_1, \ldots, ABx_n) \\
&= \det(A)\det(Bx_1, \ldots, Bx_n) \\
&= \det(A)\det(B)\det(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

d'où la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, puisque $det(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. □

Les déterminants peuvent servir à calculer le rang d'une matrice de taille quelconque : le point est que l'on peut extraire d'une matrice des matrices carrées en ne gardant que les coefficients correspondant à certaines lignes et colonnes.

**Définition:** Soit $r \leq \min(m, n)$, on appelle *mineurs* d'ordre $r$ d'une matrice $m \times n$ les déterminants d'une matrice extraite de taille $r \times r$.

Exemples : Les mineurs d'ordre 1 sont simplement les coefficients de la matrice ; les mineurs d'ordre 2 d'une matrice $A = (a_{ij})$ sont les expressions $M_{i,j;k,l} = a_{ik}a_{jl} - a_{jk}a_{il}$ ; quelques mineurs d'ordre trois de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ sont donnés par

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 46, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

**THÉORÈME:** *Soit $A$ une matrice $m \times n$ alors $Rang(A) = r$ si et seulement si :*
*i) On peut extraire un mineur non nul d'ordre $r$ de la matrice $A$.*
*ii) Tous les mineurs de $A$ d'ordre $r + 1$ sont nuls.*

**Démonstration:** Si un mineur d'ordre $r$ est non nul, alors il y a $r$ vecteurs colonnes indépendants donc le rang est au moins $r$. Inversement pour prouver qu'une matrice de rang $r$ contient un mineur d'ordre $r$, il est plus simple d'utiliser que le rang ainsi que l'existence d'un mineur de taille donnée non nul ne change pas par opérations élémentaires sur les lignes où les colonnes. On est amené alors à prouver l'énoncé pour les matrices de la forme $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui est immédiat. □

Exemple : Le déterminant de la matrice $A$ de taille $4 \times 4$ donnée ci-devant est nul et l'un (au moins) de ses mineurs d'ordre 3 est non nul, par conséquent cette matrice est de rang 3.

Donnons maintenant une des applications classiques des déterminants aux systèmes linéaires.

**THÉORÈME:** *(Systèmes de Cramer) Considérons un système linéaire carré :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

*dont la matrice associée est inversible ; alors il a pour unique solution*

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}}$$

**Démonstration:** Appelons $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice associée au système linéaire et $b$ le vecteur colonne de coordonnées $b_i$ ; alors le système se traduit par $\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = b$ donc $\det(C_1, \ldots, b, \ldots, C_n) = x_i \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$. On obtient l'énoncé annoncé en divisant par $\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$. □

## 10.2 CALCULS DE DÉTERMINANTS

*Les théorèmes précédents ont motivé, nous l'espérons, l'apprentissage de quelques techniques de calcul de déterminant.*

Remarque : D'après la propriété de multilinéarité du déterminant, les opérations élémentaires modifient de la façon suivante le déterminant :

– Remplacer une colonne $C_i$ par $C_i + \alpha C_j$ ne modifie pas le déterminant.

– Inverser deux colonnes ne change pas la valeur absolue, mais change le signe.

– Multiplier une colonne par $\alpha$ multiplie le déterminant par $\alpha$.

On est ramené alors au cas d'une matrice triangulaire qui est assez facile :

**THÉORÈME:** *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux :*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & a_{22} & * & * \\ & & . & * \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \ldots a_{nn}$$

**Démonstration:** Notons $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Ce déterminant est le déterminant des vecteurs $a_{11}e_1 + \ldots$, $a_{22}e_2 + \ldots$, $\ldots$, $a_{nn}e_n$ et est donc aussi le déterminant de $a_{11}e_1$, $a_{22}e_2$, $\ldots$, $a_{nn}e_n$. Ce dernier déterminant est égal à $a_{11} \ldots a_{nn} \det(e_1, \ldots, e_n) = a_{11} \ldots a_{nn}$. □

Une autre technique souvent utile et également basée sur la multilinéarité du déterminant est la suivante :

**THÉORÈME:** *(développement par rapport à une colonne) On a la formule suivante :*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & . & \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ & . & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix}$$

*où la "croix" signifie que l'on a retiré la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.*

**Démonstration:** La $j$-ème colonne s'écrit $\sum_i a_{ij} e_i$ donc par linéarité on peut se ramener au cas où la colonne est le vecteur $e_i$. Si l'on ramène la $i$-ème ligne sur la première ligne, on multiplie le déterminant par $(-1)^{i+j}$ (compter le nombre de transpositions) et on doit juste vérifier que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & ** \\ 0 & \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det(A)$$

Ce qui est laissé au lecteur. □

Exemple (calcul de déterminant $3 \times 3$ à partir de déterminants $2 \times 2$ :

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (+3)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (8)\det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-2)\det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -9$$

Lagrange Joseph (1736–1813)

# CHAPITRE 11 GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN ET L'ESPACE

*Ce chapitre reprend les notions d'algèbre linéaire en intégrant les concepts de produit scalaire et d'orthogonalité étudiés au lycée. Outre la description d'exemples d'isométries (rotations, symétries orthogonales, translations) l'illustration principale est le calcul de la distance d'un point à une droite ou un plan. D'un point de vue algébrique, on identifie le "plan" avec $\mathbf{R}^2$ et l'espace à trois dimensions avec $\mathbf{R}^3$. On notera qu'avec ces identifications une "droite" dans le plan possède une équation du type $ax + by + c$ et n'est pas un espace vectoriel (sauf si $c = 0$); on appellera "droite vectorielle" une droite d'équation $ax + by = 0$. De même on parlera de plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans l'espace $\mathbf{R}^3$; un plan vectoriel est un plan d'équation $ax + by + cz = 0$.*

## 11.1 PRODUIT SCALAIRE ET ISOMÉTRIES.

Commençons par rappeler les définitions suivantes dans l'espace à trois dimensions $\mathbf{R}^3$ (nous vous laissons formuler les mêmes définitions dans le plan $\mathbf{R}^2$).

**Définition:** On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs $x, y \in \mathbf{R}^3$ de coordonnées $x_1, x_2, x_3$, resp. $y_1, y_2, y_3$ le nombre :

$$(x \cdot y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Les vecteurs $x$ et $y$ sont *orthogonaux* si $(x \cdot y) = 0$.

**Définition:** On appelle *norme euclidienne* du vecteur $x$ de $\mathbf{R}^3$ le nombre :

$$||x|| := \sqrt{(x \cdot x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

La *distance euclidienne* entre deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbf{R}^3$ est définie par la formule :

$$\text{distance}\,(x, y) := d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Enfin un vecteur $x$ est dit *unitaire* si $||x|| = 1$.

Remarques. a) (Théorème de Pythagore!) Soient $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ tels que $x - z$ soit orthogonal à $y - z$ (i.e. les trois points forment un triangle rectangle en $z$) alors :

$$\begin{aligned} d(x,y)^2 &= ||x-y||^2 = ||(x-z) - (y-z)||^2 = ||x-z||^2 - 2(x-z)\cdot(y-z) + ||y-z||^2 \\ &= ||x-z||^2 + ||y-z||^2 = d(x,z)^2 + d(y,z)^2. \end{aligned}$$

b) Soit $x$ un vecteur non nul, on peut toujours écrire $x = ||x||\, \frac{x}{||x||}$ donc comme un vecteur unitaire (la direction donnée par $x$) multiplié par un scalaire positif (sa longueur ou norme).
c) Pour écrire l'équation d'une droite vectorielle $D$ dans le plan, disons $ax + by = 0$, on peut aussi simplement prendre le vecteur $u$ de coordonnée $a$ et $b$ et observer que, si $X$ est le vecteur de coordonnées $x, y$, on peut écrire l'équation du plan

$$(u \cdot X) = 0.$$

Ainsi la donnée de la droite (vectorielle) équivaut à la donnée d'un vecteur orthogonal à cette droite. Cette remarque permet de passer facilement d'une base de $D$ à une équation.

Les principales propriétés de la norme euclidienne sont résumées dans la proposition suivante (les trois premières propriétés caractérisant les normes).

**PROPOSITION:** *La norme euclidienne sur $\mathbf{R}^3$ vérifie pour tout $x, y \in \mathbf{R}^3$*

*(i) On a $||x|| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$;*

*(ii) Pour $a \in \mathbf{R}$, on a $||ax|| = |a|||x||$;*

*(iii) (inégalité triangulaire) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. De plus on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|(x \cdot y)| := |x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3| \leq ||x||\,||y||.$$

*(iv)* distance$(x, y) \geq 0$ *(avec égalité seulement si $x = y$)*

*(v)* distance$(x, y) \leq$ distance$(x, z)$ + distance$(z, y)$.

Remarque. Dans le plan, on sait (et l'on va revoir cela) que, si $\theta$ est l'angle entre les deux vecteurs $x$ et $y$, alors $(x \cdot y) = \cos\theta\, ||x||\,||y||$ ; l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut donc dans ce cas à $|\cos\theta| \leq 1$.

**Démonstration:** Les deux premières propriétés sont immédiates, les points $(iv)$ et $(v)$ se déduisent facilement de $(i)$, $(ii)$ et $(iii)$ ; montrons la troisième à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On écrit pour cela :

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 = ||x||^2 + 2\,(x \cdot y) + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz on utilise l'astuce suivante. On calcule, pour $t \in \mathbf{R}$ :

$$0 \leq ||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2t(x \cdot y) + t^2||y||^2.$$

On remarque alors que, si un polynôme $a + 2bt + ct^2$ est constamment positif, alors $\Delta = b^2 - ac \leq 0$, ce qui s'écrit ici $(x \cdot y)^2 - ||x||^2||y||^2 \leq 0$, d'où l'inégalité cherchée se déduit. □

**PROPOSITION:** *Soit $D$ une droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$, l'orthogonal de $D$, noté $D^\perp := \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \forall y \in D,\ (x \cdot y) = 0\}$ est un plan vectoriel supplémentaire de $D$ (c'est-à-dire que $\mathbf{R}^3 = D \oplus D^\perp$). Soit $\Pi$ une plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$, l'orthogonal de $\Pi$, noté $\Pi^\perp := \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \forall y \in \Pi,\ (x \cdot y) = 0\}$ est une droite vectorielle supplémentaire de $\Pi$ (c'est-à-dire que $\mathbf{R}^3 = \Pi \oplus \Pi^\perp$).*

**Démonstration:** Du point de vue de l'algèbre linéaire, il est immédiat que $D^\perp$ est un sous-espace vectoriel et que $D \cap D^\perp = \{0\}$, il faut donc prouver que $\dim D^\perp = 2$. Pour cela introduisons une base $f_1$ de $D$ et l'application linéaire $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $\Phi(x) = (f_1 \cdot x)$. Par construction $\operatorname{Ker}\phi = D^\perp$; montrons que $\Phi$ est surjective et donc que $\dim D^\perp = \dim \operatorname{Ker}\Phi = 2$ comme annoncé. Si $\Phi$ n'était pas surjective, l'image serait nulle et on aurait, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ : $(f_1 \cdot x) = 0$, ce qui entraînerait $f_1 = 0$ et une contradiction. La deuxième affirmation se prouve de façon analogue. □

Remarque. L'orthogonal d'une droite dans le plan $\mathbf{R}^2$ est une droite, on peut résumer cela en disant que si $E$ est un sous-espace, $E \oplus E^{\perp}$ est l'espace total.

**Définition:** Une base $e_1, e_2, e_3$ de $\mathbf{R}^3$ est *orthogonale* si les vecteurs $e_i$ sont deux à deux orthogonaux; la base est *orthonormée* si de plus $||e_i|| = 1$.

Exemple : on voit immédiatement que la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est orthonormée.

**THÉORÈME:** (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) *Soit $u_1, u_2, u_3$ une base (quelconque) de $\mathbf{R}^3$, on peut obtenir une base orthogonale $v_1, v_2, v_3$ de la forme suivante : $v_1 := u_1$, $v_2 = u_2 + au_1$, $v_3 = u_3 + bu_2 + cu_1$ pour certains réels $a, b, c$. Pour obtenir une base orthonormée, on remplace $v_i$ par $v_i' := v_i/||v_i||$.*

**Démonstration:** La construction se réalise étape par étape. On pose donc $v_1 = u_1$ ensuite on cherche $a \in \mathbf{R}$ tel que $(u_2 + au_1) \cdot u_1 = 0$ et on trouve donc $a = -(u_2 \cdot u_1)/||u_1||^2$, ainsi on choisit $v_2 := u_2 - \frac{(u_2 \cdot u_1)}{||u_1||^2} u_1$. Ensuite on cherche $v_3$ de la forme $v_3 = u_3 + \lambda v_2 + \mu v_1$ (il sera bien de la forme $u_3 + bu_2 + cu_1$) tel que $(v_3 \cdot v_2) = (v_3 \cdot v_1) = 0$; on trouve comme conditions $(u_3 \cdot v_2) + \lambda ||v_2||^2 = (u_3 \cdot v_1) + \mu ||v_1||^2 = 0$ d'où le choix $v_3 = u_3 - \frac{(u_3 \cdot v_2)}{||v_2||^2} v_2 - \frac{(u_3 \cdot v_1)}{||v_1||^2} v_1$. La matrice faisant passer de $u_1, u_2, u_3$ à $v_1, v_2, v_3$ est inversible (elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale) donc $v_1, v_2, v_3$ est bien une base orthogonale. □

**Définition:** On appelle *isométrie* de $\mathbf{R}^3$ une application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ qui préserve la distance, c'est-à-dire telle que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^3$ on a $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$.

**PROPOSITION:** *Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une application linéaire, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*(i) $u$ préserve la distance (i.e. est une isométrie).*
*(ii) $u$ préserve la norme (i.e.pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ on a $||f(x)|| = ||x||$).*
*(iii) $u$ préserve le produit scalaire (i.e.pour tout $x, y \in \mathbf{R}^3$ on a $(f(x) \cdot f(y)) = (x \cdot y)$).*

**Démonstration:** Si une application linéaire $f$ préserve la distance, elle préserve la norme car $||f(x)|| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = ||x||$. Si $f$ préserve la norme elle préserve le produit scalaire car

$$(x \cdot y) = \frac{1}{2}\left\{||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right\}.$$

Enfin si $f$ préserve le produit scalaire elle préserve la distance puisque $d(f(x), f(y))$ vaut

$$\sqrt{(f(x) - f(y)) \cdot (f(x) - f(y))} = \sqrt{f(x - y) \cdot f(x - y)} = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)} = d(x, y).$$

□

Remarque. On peut démontrer qu'une isométrie s'écrit nécessairement $f(x) = u(x) + a$ avec $u$ isométrie linéaire (en particulier telle que $u(0) = 0$) et $a \in \mathbf{R}^3$. En effet quitte à remplacer $f(x)$ par $f(x) - f(0)$ on peut supposer que $f(0) = 0$. Soit $e_1, e_2, e_3$ une base orthonormée (par exemple la base canonique) alors les $e_i' := f(e_i)$ forment aussi une base orthonormée. Soit $x \in \mathbf{R}^3$, on peut l'écrire $x = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ et on note que $(x\cdot e_i) = x_i$. Si on écrit de même $f(x) = y_1e'_1 + y_2e'_2 + y_3e'_3$ et on observe que $(f(x) \cdot e'_i) = y_i$ et ainsi :

$$x_i = (x \cdot e_i) = (f(x) \cdot f(e)_i) = (f(x) \cdot e'_i) = y_i,$$

ce qui montre bien que $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3)$ et que $f$ est linéaire.

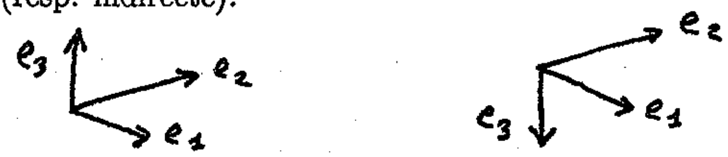
Caractérisation matricielle des isométries.

**PROPOSITION:** *Soit $A$ la matrice d'une application linéaire $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, l'application est une isométrie si et seulement si ${}^tAA = I$ ou encore si ses colonnes fournissent une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.*

**Démonstration:** Le produit scalaire de deux vecteurs (écrits en colonne) $X$ et $Y$ s'écrit en termes de matrices ${}^tXY$ donc si $A$ est la matrice d'une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$, celle-ci est une isométrie si et seulement si ${}^t(AX)(AY) = {}^tXY$ ou encore ${}^tX({}^tAA)Y = {}^tXY$ pour tout $X, Y \in \mathbf{R}^3$ ce qui entraîne facilement ${}^tAA = I$. Ensuite une autre interprétation d'une isométrie linéaire est une transformation linéaire qui transforme la base canonique en une base orthonormée, ou encore que ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. □

Remarque : Si $A$ est la matrice d'une isométrie, on observe que $1 = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$ et donc $\det(A) = \pm 1$. Ceci justifie la définition suivante :

**Définition:** Une base $e_1, e_2, e_3$ est une base *directe* (resp. *indirecte*) si $\det(e_1, e_2, e_3) > 0$ (resp. si $\det(e_1, e_2, e_3) < 0$). Une isométrie linéaire $u$ est *directe* (resp. *indirecte*) si $\det(u) = +1$ (resp. si $\det(u) = -1$). Une isométrie est directe (resp. indirecte) si sa partie linéaire est directe (resp. indirecte).



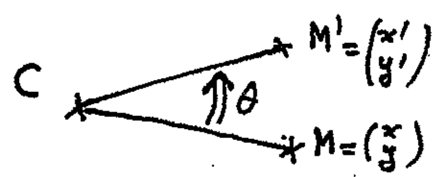
base directe base indirecte

Exemples d'isométrie de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$.

(a) Translation dans $\mathbf{R}^3$. L'application $f(x) = x + a$ est clairement une isométrie, remarquons que, sauf le cas trivial $a = 0$, la transformation n'a aucun point fixe. C'est une isométrie directe.

(b) Rotation dans le plan (c'est une isométrie directe). On peut décrire en coordonnées cartésiennes la rotation $f$ d'angle $\theta$ et centre $C = (x_0, y_0)$ en notant $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$



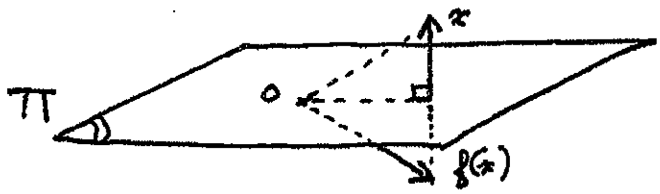

(c) Symétrie par rapport à une droite dans le plan (resp. par rapport à un plan dans l'espace). Soit $\Pi$ un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ et $y$ un vecteur unitaire orthogonal à $\Pi$; tout vecteur $x$ de $\mathbf{R}^3$ se décompose de façon unique en $x = \lambda y + x_2$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x_2 \in \Pi$. On pose alors

$$f(x) := -\lambda y + x_2.$$

Par exemple la symétrie orthogonale par rapport au plan $(y \cdot x) = 0$ s'écrit :

$$f(x) = x - 2\frac{(y \cdot x)}{||y||^2}\cancel{x}\,y.$$

On vérifie que $f$ est bien une isométrie qui est indirecte.




Enfin on peut composer deux isométries ou prendre la bijection inverse (vérifier que le résultat est toujours une isométrie). Une notion un peu plus générale est celle de *similitude* i.e. de transformation de $\mathbf{R}^3$ qui dilate d'un facteur constant les distances, c'est-à-dire telle qu'il existe $\mu > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^3, \qquad d(f(x), f(y)) = \mu d(x, y).$$

On montre facilement qu'une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

## 11.2 LE PLAN EUCLIDIEN (DIMENSION 2)

**Rappel.** Nous avons vu que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta' = \theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$), ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{cases} \iff \qquad \theta' = \theta + 2k\pi \qquad (\text{avec } k \in \mathbf{Z})$$

Nous dirons simplement que cosinus et sinus déterminent l'angle à $2\pi$ près. Inversement si $a, b \in \mathbf{R}$ vérifient $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe un réel $\theta$ (unique à $2\pi$ près) tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$. Introduisons formellement la définition de l'angle.

**Définition:** Soit $u, v$ deux vecteurs unitaires non nuls du plan euclidien orienté (disons muni de la base canonique), on appelle *angle de $u$ vers $v$* le réel $\theta$ (unique modulo $2\pi$) tel que $v$ s'obtienne en appliquant la rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. L'angle entre deux vecteurs non nuls $u$ et $v$ est l'angle entre $u/||u||$ et $v/||v||$.

Nous avons déjà vu deux exemples d'isométries linéaires : les rotations d'angle $\theta$ et les symétries orthogonales par rapport à une droite vectorielle, on peut montrer que ce sont les seules (on donne l'énoncé sous forme matricielle).

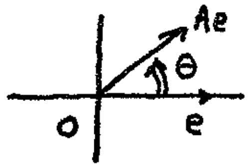
**THÉORÈME:** *Soit $A$ une matrice orthogonale (la matrice d'une isométrie) et soit $\epsilon = \pm 1$ son déterminant, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ (unique modulo $2\pi$) tel que*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\epsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \epsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

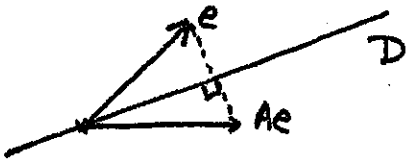
*Ainsi $A$ correspond soit à la rotation d'angle $\theta$, soit à la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe des $x$.*

**Démonstration:** Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Les colonnes sont des vecteurs de normes 1 donc on peut écrire $a = \cos(\theta)$, $c = \; sin(\theta)$ et $b = \cos(\phi)$, $d =: sin(\phi)$ et le produit scalaire des deux vecteurs colonne est nul, soit $\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) = 0$ ou encore $\cos(\phi - \theta) = 0$. On conclut donc que $\phi = \epsilon\frac{\pi}{2} + \theta$ modulo $2\pi$ (avec $\epsilon = \pm 1$) et ainsi $b = \cos(\epsilon\frac{\pi}{2} + \theta) = -\epsilon\sin(\theta)$ et $d = \sin(\epsilon\frac{\pi}{2} + \theta) = \epsilon\cos(\theta)$, d'où le résultat annoncé. □

rotation d'angle $\theta$ :




symétrie orthogonale par rapport à $D$ :




A titre d'exercice on pourra en déduire une liste des isométries affines; ce sont : les rotations d'angle $\theta$ et centre $C$, les symétries orthogonales par rapport à une droite affine, les translations et les *glissements* (symétrie orthogonale par rapport à la droite $D$ composée avec une translation parallèle à la droite $D$).

**Définition:** On appelle *distance d'un point $P$ à une droite $D$* (dans le plan) la borne inférieure des distances du point avec les points de la droite. En symbole :

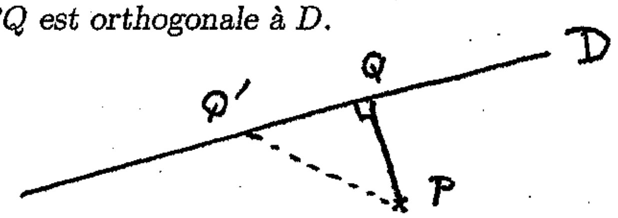
$$d(P, D) := \inf_{Q \in D} d(P, Q).$$

En particulier on voit que $P \in D$ entraîne que $d(P, D) = 0$. Voici le calcul en général :

**THÉORÈME:** *Soit $D$ une droite du plan ayant pour équation $ax + by + c = 0$ et $P = (x_0, y_0)$ un point du plan; la distance de $P$ à $D$ est donnée par*

$$d(P, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

*De plus il existe un unique point $Q \in D$ tel que $d(P, D) = d(P, Q)$ et il peut être caractérisé par le fait que la droite $PQ$ est orthogonale à $D$.*




**Démonstration:** Soit $u$ un vecteur orthogonal à la droite $D$, la droite passant par $P$ et de direction $u$ rencontre $D$ en un unique point $Q$. Commençons par montrer que $Q$

est l'unique point qui réalise la distance $d(P, D)$. Soit en effet un autre point $Q' \in D$, par construction le vecteur $PQ$ (qui est proportionnel à $u$) est orthogonal à $QQ'$ et donc d'après le "théorème de Pythagore" :

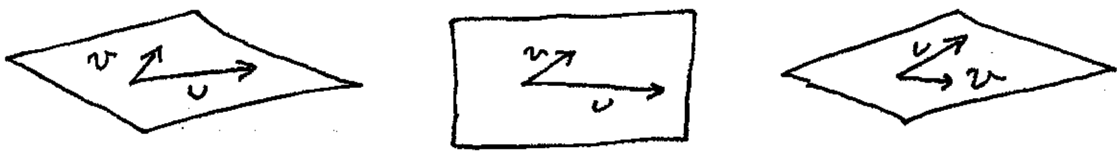
$$d(P, Q')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, Q')^2 \geq d(P, Q)^2$$

avec égalité si et seulement si $Q = Q'$. Calculons maintenant $d(P, Q) = d(P, D)$. Ecrivons pour cela l'équation de $D$ ainsi : $(x_1 \cdot z) + c = 0$ et notons $z_0$ le vecteur correspondant à $P$. On peut aussi écrire $z = z_0 + \lambda x_1$ et on aura $||z - z_0|| = |\lambda| \cdot ||x_1||$. En écrivant que $z \in D$, on obtient $0 = (x_1 \cdot z) + c = (x_1 \cdot z_0) + c + \lambda ||x_1||^2$ d'où $|\lambda| = \frac{|(x_1 \cdot z_0) + c|}{||x_1||^2}$. On en tire $d(P, Q) = ||z - z_0|| = |(x_1 \cdot z_0) + c| / ||x_1||$, ce qui est le résultat cherché. □

## 11.3 L'ESPACE EUCLIDIEN (DIMENSION 3)

*L'observation de la géométrie en dimension trois devrait nous apparaître naturelle. Il faut toutefois faire attention à certains phénomènes liés aux deux orientations possibles de l'espace, ainsi la question naïve suivante est en fait dépourvue de sens : "dans quel sens tourne la terre autour du soleil?". Nous commencerons par y définir une notion d'angle entre deux vecteurs dont on verra qu'elle est différente de celle du plan (orienté).*

Le problème de définir et calculer l'angle de deux vecteurs dans l'espace peut sembler simple : on se dit qu'il suffit de considérer le plan engendré par les deux vecteurs et de calculer l'angle dans le plan... Observons cependant sur le dessin ci-dessous ce qui se passe si l'on se déplace dans l'espace.




On s'aperçoit que l'on peut donner à l'angle plusieurs valeurs : $\theta$, $-\theta$ ou $2\pi - \theta$... En particulier on peut toujours faire un choix tel que l'angle soit situé dans l'intervalle $[0, \pi]$.

**Définition:** L'*angle entre $u$ et $v$ dans l'espace* (N.B. ne pas séparer les mots) est le réel $\theta \in [0, \pi]$ tel qu'il existe une orientation du plan $\langle u, v \rangle$ tel que la rotation d'angle $\theta$ envoie $u$ sur $v$.

Le procédé suivant permet de fabriquer des bases directes ou orthonormées directes. Observons que, si $u, v \in \mathbf{R}^3$ et $x \in \mathbf{R}^3$ (de coordonnées $x_1$, $x_2$ et $x_3$) alors :

$$\det(u, v, x) = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de définir

**Définition:** Le *produit vectoriel* de $u$ et $v$, noté $u \wedge v$ est le vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ on ait :

$$(u \wedge v) \cdot x = \det(u, v, x).$$

On en tire l'expression analytique du produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

ainsi que ses principales propriétés :

**PROPOSITION:** *Le produit vectoriel est bilinéaire (i.e. linéaire en $u$ et en $v$) et vérifie les formules suivantes.*
*(i)* $v \wedge u = -u \wedge v$; *en particulier* $u \wedge u = 0$.
*(ii)* $u \wedge v$ *est orthogonal à* $u$ *et* $v$.
*(iii) Si* $u, v$ *sont indépendants et si l'angle de* $u$ *à* $v$ *est* $\theta \in [0, \pi]$ *alors*

$$||u \wedge v|| = \sin(\theta)\, ||u|| \cdot ||v||.$$

*(On observera que, comme* $\theta \in [0, \pi]$, *on a* $\sin(\theta) = |\sin(\theta)| \geq 0$*).*

**Démonstration:** La première formule découle du fait que $\det(u, v, x) = -\det(v, u, x)$ et la seconde du fait que $(u \wedge v) \cdot u = \det(u, v, u) = 0$. Pour la démonstration de *(iii)* on va introduire le *déterminant de Gram* de deux (ou trois ou etc) vecteurs :

$$G(x_1, x_2) := \det \begin{pmatrix} ||x_1||^2 & (x_1 \cdot x_2) \\ (x_1 \cdot x_2) & ||x_2||^2 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas de deux vecteurs $u$, $v$ comme dans l'énoncé, on observera que l'on peut calculer ce dernier ainsi :

$$G(u, v) = ||u||^2||v||^2 - (u \cdot v)^2 = (1 - \cos^2(\theta))||u||^2||v||^2 = \sin^2(\theta)||u||^2||v||^2.$$

Posons ensuite $w := u \wedge v$ et calculons de deux manières $G(u, v, w)$. D'abord $G(u, v, w) = ||w||^2 G(u, v)$ car $w$ est orthogonal à $u$ et $v$. Ensuite montrons que

$$G(u, v, w) = \det(u, v, w)^2 \qquad (*)$$

ce qui montrera que

$$||u \wedge v||^2 = (u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w) = \sqrt{G(u, v, w)} = ||w|| \sqrt{G(u, v)} = ||w|| \sin(\theta) ||u|| ||v||$$

ce qui est la formule voulue après avoir divisé par $||w||$. Pour prouver la formule $(*)$ on montre la règle de transformation suivante: $G(f(u), f(v), f(w)) = \det(f)^2 G(u, v, w)$; comme $\det(f(u), f(v), f(w)) = \det(f) \det(u, v, w)$ et que la formule $(*)$ est clairement vraie lorsque $u, v, w$ est la base canonique, on en tire qu'elle est toujours vraie. □

**COROLLAIRE:** *Soit* $u, v$ *deux vecteurs unitaires orthogonaux, posons* $w := u \wedge v$ *alors* $u, v, w$ *forment une base orthonormée directe.*

**Démonstration:** Les propriétés *(i)* et *(iii)* garantissent que $u, v, w$ est une base orthonormée et on a par construction $\det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w = ||u \wedge v||^2 > 0$. □

Remarque. La donnée d'un plan vectoriel $\Pi$ dans l'espace, d'équation disons $ax + by + cz = 0$, équivaut à la donnée du vecteur $u$ de coordonnées $a, b, c$ et on peut écrire en abrégé cette équation, en notant $X$ le vecteur de coordonnée $x, y, z$ :

$$(u \cdot X) = 0.$$

Connaissant une base $u, v$ du plan $\Pi$ on peut en déduire une équation du plan en calculant $w := u \wedge v$; en effet une équation de $\Pi$ sera donnée par $(w \cdot X) = 0$.

**Définition:** On appelle *distance d'un point à P un plan* $\Pi$ (dans l'espace) la borne inférieure des distances du point avec les points du plan. En symbole :

$$d(P, \Pi) := \inf_{Q \in \Pi} d(P, Q).$$

En particulier on voit que $P \in \Pi$ entraîne que $d(P, \Pi) = 0$. Voici le calcul en général :

**THÉORÈME:** *Soit $\Pi$ un plan dans l'espace ayant pour équation $ax+by+cz+d = 0$ et $P = (x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace; la distance de $P$ à $\Pi$ est donnée par*

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

*De plus il existe un unique point $Q \in \Pi$ tel que $d(P, \Pi) = d(P, Q)$ et il peut être caractérisé par le fait que la droite $PQ$ est orthogonale à $\Pi$.*

**Démonstration:** Le lecteur observera la similarité de cet énoncé avec la formule donnant la distance d'un point à une droite dans le plan et, en regardant sa démonstration, verra qu'elle s'applique presque mot pour mot. □

Euclide [$E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$] (environ 300 ans avant JC)

## APPENDICE : RÉSUMÉ D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Cet appendice contient un résumé des résultats d'algèbre linéaire développés dans ce cours et une synthèse des différentes méthodes. On donne des applications du cours mais aucune démonstration (celles-ci sont contenues ou peuvent être extraites des chapitres précédents), en cela ce chapitre empiète un peu sur le travail de TD.*

### A. DÉFINITIONS ET PROBLÈMES

**Doivent être connues les définitions d'un (sous-)espace vectoriel, d'une base, d'une partie libre ou génératrice.**

Etant donné une famille de vecteurs $f_1, f_2, \ldots, f_s$, on veut savoir si elle est libre, génératrice ou forme une base. On veut savoir aussi quel est son rang, c'est-à-dire quelle est la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre. Si elle est libre, on veut savoir comment la compléter en une base (ce qui est possible d'après le théorème de la base incomplète).

Un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ peut être donné par une base, une partie génératrice, par des équations ou par des équations en nombre minimal. Dans le premier et le dernier cas la dimension du sous-espace vectoriel est facile à calculer : c'est le cardinal d'une base et c'est aussi $n$ moins le nombre minimal d'équations.

Exemple: le sous-espace vectoriel $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0,\ x+y = 0,\ z = 0\}$ est aussi égal à $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y = 0,\ z = 0\}$ ; il est engendré par les vecteurs $(1, -1, 0)$, $(-2, 2, 0)$ et $(18, 18, 0)$ et admet pour base le vecteur $(1, -1, 0)$. Il a pour dimension 1.

Remarque: en géométrie analytique, on obtient souvent un sous-espace vectoriel sous forme paramétrique; en fait cela revient à se donner une partie génératrice: le sous-espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_s$ est l'ensemble $\{t_1 f_1 + t_2 f_2 + \ldots + t_s f_s \mid (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbf{R}^s\}$.

Un problème se pose souvent : ayant des équations pour un sous-espace vectoriel, trouver une base et la dimension de ce sous-espace vectoriel. Inversement, ayant une base ou une partie génératrice, on veut trouver des équations.

On sait que l'intersection ou la somme de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel; un problème naturel est de calculer une base ou des équations de cette intersection ou (somme). En particulier deux sous-espaces vectoriels $E$ et $F$ sont en somme directe si $E \cap F = \{0\}$.

**Doivent être connues les définitions d'une application linéaire, du noyau et de l'image, de la matrice de l'application linéaire par rapport à une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée.**

Une application linéaire $u$, disons de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^m$ peut être donnée explicitement (exemple : $u(x, y, z) = (x+y, z, x+y+z, x+y)$) ou par sa matrice dans des bases données de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ ou encore par une description géomètrique (exemples : la projection de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$ sur un plan parallèlement à une droite, la rotation d'angle $\pi/5$ autour d'une droite de $\mathbf{R}^3$). Dans le dernier cas, on veut trouver la matrice de $u$ dans des base données, dans les premiers cas on veut trouver une interprétation géomètrique : ceci se fait le plus souvent en choisissant de "bonnes" bases et en calculant la matrice de $u$ dans ces bases. Les méthodes pour trouver de "bonnes" bases ne font pas partie du programme de première année, elles seront donc toujours données dans les problèmes et exemples.

Dans tous les cas on veut calculer le noyau et l'image de l'application linéaire.

**On doit connaître les règles de calcul des matrices ainsi que la formule de changement de bases à l'aide des matrices de passages.**

Faire le produit de matrices permet de calculer la composée de deux applications linéaires (et vice versa). La formule de changement de bases ("$A' = Q^{-1}AP$") permet de calculer la matrice d'une application linéaire dans de nouvelles bases, connaissant la matrice de l'application linéaire dans certaines bases.

B. CALCULS PRATIQUES

*On donne une liste (non exhaustive) de problèmes d'algèbre linéaire et de méthodes pour les résoudre. Un autre titre à ce paragraphe aurait pu être : application de la méthode du pivot.*

a) Résolution de système linéaire.

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- On forme la matrice $(A|b)$ avec $A$ matrice $m \times n$ formée des coefficients $a_{ij}$ et $b$ vecteur colonne formé des coefficients $b_i$. - On échelonne la matrice $(A|b) \to (A'|b')$ et on regarde si il y a un pivot sur la dernière colonne. S'il y a un pivot, le système n'a pas de solution. Sinon, on repère les colonnes sans pivot de la matrice $A'$, elles correspondent aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$. Les solutions s'obtiennent toutes en fixant des valeurs arbitraires aux inconnues $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ et en exprimant les autres en fonction de celles-ci.

Commentaires : l'ensemble des solutions est de la forme "solution particulière + solution de l'équation homogène" et la dimension des solutions est le nombre de colonne de $A'$ sans pivot. Si $b = 0$, il suffit d'échelonner $A \to A'$ et de raisonner sur $A'$.

b) calcul sur les vecteurs.

Soit $f_1, \ldots, f_s$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel (disons $\mathbf{R}^n$ pour fixer les idéees).

Pour vérifier si $f_1, \ldots, f_s$ est libre, on résoud le système linéaire $x_1 f_1 + \ldots + x_r f_r = 0$. Les vecteurs $f_1, \ldots, f_s$ sont libres si la seule solution est $x_1 = \ldots = x_r = 0$ (si la matrice échelonnée correspondante n'a pas de colonne sans pivot).

Pour vérifier si $f_1, \ldots, f_s$ est génératrice de $\mathbf{R}^n$, on résoud le système $x_1 f_1 + \ldots + x_r f_r = b$. Les vecteurs $f_1, \ldots, f_s$ sont générateurs si le système a une solution pour tout $b \in \mathbf{R}^n$.

Note: Les vecteurs $f_1, \ldots, f_s$ ne peuvent être indépendants dans $\mathbf{R}^n$ que si $s \leq n$ et générateurs que si $s \geq n$. Dans le cas particulier $s = n$, rappelons que libres entraîne générateurs (et base), ce qui économise souvent des calculs.

Pour extraire une partie libre maximale, on échelonne et on ne garde que les $f_i$ correspondant à une colonne avec pivot.

Pour compléter une partie libre $f_1, \ldots, f_s$ en une base, on peut ajouter à ces vecteurs des générateurs de l'espace (par exemple la base canonique) et extraire de la partie génératrice $f_1, \ldots, f_s, e_1, \ldots e_n$ une partie libre maximale par la méthode précédente.

Pour exprimer un vecteur $b$ dans une base $f_1, \ldots, f_s$, on résoud le système $x_1 f_1 + \ldots + x_r f_r = b$ (dont on sait qu'il possède une solution unique).

c) <u>calcul sur les sous – espaces vectoriels.</u>

Soit un sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbf{R}^n$ défini par les équations:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

La résolution (par la méthode du pivot) du système linéaire décrit par ces équations donne la dimension de $E$ et permet d'exprimer les variables "avec pivot" en fonction des autres, d'où le calcul d'une base.

Exemple : si le résultat des calculs donne comme solution que $x_1$ et $x_2$ sont des variables libres et que $x_3 = 2x_1 - 7x_2$, $x_4 = -2x_1 + 4x_2$ alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc une base est donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Soit maintenant un sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbf{R}^n$ donné par une partie génératrice $f_1, \ldots, f_s$, pour calculer des équations définissant $E$ on cherche à résoudre le système $x_1 f_1 + \ldots + x_s f_s = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$. La méthode du pivot donne des conditions linéaires sur les $b_i$ pour que le système ait une solution ; ces conditions donnent les équations pour que $\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$ soit dans $E$. Une base de $E$ s'obtient en extrayant une partie libre maximale de $f_1, \ldots, f_s$.

d) <u>calcul d'intersection, somme de sous – espaces.</u>

Si $E$ et $F$ sont donnés par des équations, alors $E \cap F$ est donné par la réunion des deux paquets d'équations. Si $E$ et $F$ sont donnés chacun par une partie génératrice, alors une partie génératrice de l'espace $E+F$ est donné par la réunion des deux parties génératrices de $E$ et $F$. Grâce à c) ont peut donc calculer intersection et somme de sous-espace vectoriel (leurs dimensions, une base etc).

e) calcul du noyau et image d'une application linéaire.

Soit $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ donnée par

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$, ainsi que leurs dimensions, on forme la matrice $(A|b)$ avec $A = (a_{ij})$ et $b \in \mathbf{R}^m$; on l'échelonne : $(A|b) \to (A|b')$. Le noyau est obtenu en calculant les solutions du système avec $b = 0$, sa dimension est le nombre de colonnes sans pivot de $A'$; l'image est définie par les équations linéaires en $b_i$ écrivant que le système associé à $(A|b)$ a une solution, sa dimension est le nombre de colonnes avec pivot de $A'$ (on peut vérifier que $\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u) = n$). De plus une base de $\mathrm{Im}(u)$ peut être obtenue à l'aide des vecteurs $e_i$ de la base canonique en ne retenant que les indices correspondant à une colonne avec pivot.

f) calcul sur les matrices.

Le chapitre sur les matrices étant essentiellement calculatoire on ne révise que quelques points; en particulier il faut aller voir dans le chapitre 7 la méthode donnée pour calculer l'inverse $A^{-1}$ d'une matrice (ou conclure qu'il n'existe pas) et réviser dans le chapitre 9 le calcul des matrices de passage et de changements de base.

Soit $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ donnée par

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbf{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_m$ une base de $\mathbf{R}^m$. Pour calculer $B$ la matrice de $u$ dans ces bases, on exprime chacun des vecteurs $u(e_i)$ comme combinaison linéaire des $f_j$ avec la méthode donnée en b):

$$u(e_i) = b_{1i}f_1 + \ldots + b_{mi}f_m$$

et les coefficients de $B$ sont donnés par les $b_{ij}$.