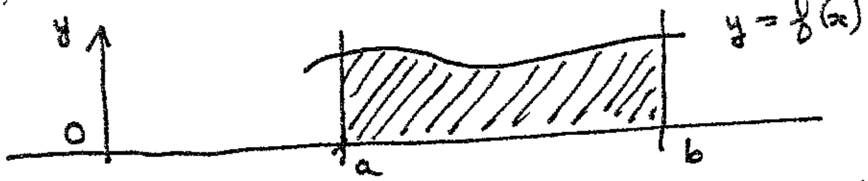
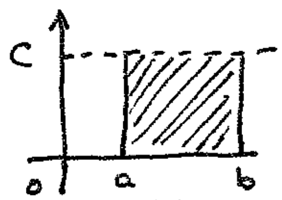
CHAPITRE 15 INTÉGRATION

L'objet de ce chapitre est le calcul des aires. Plus précisément on voit assez facilement que, en découpant les aires, on se ramène à savoir calculer les aires délimitées par deux axes verticaux, un axe horizontal et le graphe d'une fonction :

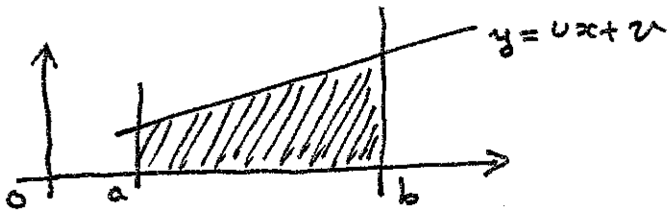


Il existe deux cas où le résultat est très simple à trouver : celui où la fonction est constante (un rectangle), celui où la fonction est linéaire (un trapèze) :



$f(x) = c$

$A = (b-a)c$



$f(x) = ux + v$

$A = (b-a)\left(\frac{(ua+v)+(ub+v)}{2}\right) = \frac{1}{2}ub^2 + bv - \frac{1}{2}ua^2 - av$

On peut dès à présent observer que l'aire, vue comme fonction de b est une fonction dérivable dont la dérivée dans le premier cas est $A' = c = f(b)$ et dans le second cas $A' = ub + v = f(b)$. Ce phénomène est général et constitue le théorème fondamental du calcul intégral, découvert par Newton. Avant de démontrer ce théorème il faut construire la théorie de l'intégration – du calcul d'aires– disons pour les fonctions continues. L'idée est assez simple : on approche toute fonction par des fonctions "en escalier", c'est-à-dire qu'on approche une surface par une somme de rectangle ; on prend un découpage de plus en plus fin et le résultat à la limite est l'aire cherchée. Ce programme comporte des difficultés techniques mais est essentiellement correct. En particulier Archimède est le premier à l'avoir utilisé et ses calculs d'aires délimitées par des arcs de cercles, des arcs de paraboles doivent être vus comme les premiers éléments du calcul intégral.

15.1 INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES.

Commençons par définir précisément les fonctions en escalier :

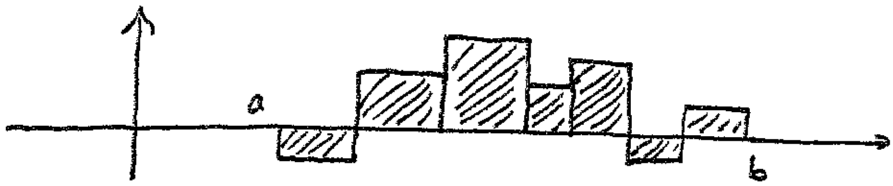
Définition: Une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction *en escalier* si il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ par $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.

Exemple : la fonction $E(x)$ "partie entière" est une fonction en escalier sur tout intervalle de $\mathbf{R}$.

Remarque : L'avantage des fonctions en escalier est qu'il est facile de calculer l'aire qu'elles délimitent. En effet si $f(x) = c_i$ pour $x \in]a_i, a_{i+1}[$ alors l'aire est donnée par le nombre

$$S(f) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$$

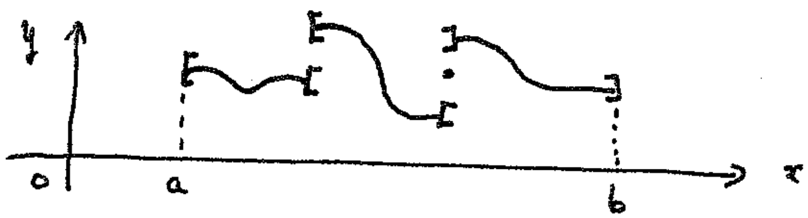
à condition de compter positivement l'aire située au dessus de l'axe des x et négativement celle qui est située au dessous.



Comme nous voulons approcher les fonctions continues par des fonctions en escalier, il est commode d'introduire une classe de fonctions qui contient les deux types de fonctions :

Définition: Une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est une fonction *continue par morceaux* si il existe une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ par $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ telle que f soit continue chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et admette une limite à droite et à gauche en chaque a_i.

Exemple : une fonction continue ou une fonction en escalier est continue par morceaux. Une fonction continue par morceaux a l'allure suivante :



Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, c'est-à-dire l'aire qu'elle délimite (en comptant positivement l'aire située au dessus de l'axe des x et négativement celle qui est située au dessous).

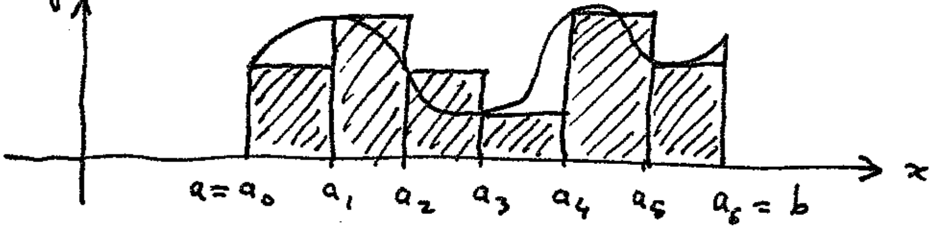
Soit donc f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Comme nous allons considérer des subdivisions "de plus en plus fines" de l'intervalle $[a, b]$, il faut introduire une notion pour mesurer cela :

Définition: Soit $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, le *pas* de la subdivision est la quantité $\max(a_{i+1} - a_i)$. On notera S_δ l'ensemble des subdivisions de pas inférieur à δ.

Soit σ une subdivision $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, on notera $I(f, \sigma)$ la somme (souvent appelée *somme de Riemann*) :

$$I(f, \sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(a_{i+1} - a_i)$$



Il est clair intuitivement que cette somme approche la valeur de l'aire délimité par le graphe de la fonction f et qu'elle l'approche d'autant mieux que le pas de la subdivision est petit.

Il est donc raisonnable de définir :

Définition: Une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est *intégrable* si la limite de $I(f,\sigma)$ quand le pas de la subdivision σ tend vers 0 existe ; la valeur de cette limite s'appelle l'*intégrale* de f entre a et b et se note $\int_a^b f(t)dt$.

Une justification de cette notation (due à Leibniz) est qu'elle s'avère commode pour effectuer de façon mécanique des calculs (intégration par parties, changement de variables, etc, voir chapitre 17) ; une justification plus heuristique est que dt répésente un accroissement infinitésimal de la variable et que $\int_a^b f(t)dt$ est la limite de $\sum_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(b-a))(1/n)$.

THÉORÈME: *(i) Une fonction continue par morceaux est intégrable.*

(ii) Si f est une fonction en escalier et $f(]a_i,a_{i+1}[) = c_i$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$$

Démonstration: Il n'y a pas de difficulté à prouver la seconde partie (sauf peut-être la difficulté des notations ...). Nous ne donnerons hélas pas la preuve complète de l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux. Indiquons néanmoins quelques unes des étapes de la démonstration. Le point clef est de montrer que si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors on peut l'encadrer par deux suites monotones de fonctions en escalier l'approchant de mieux en mieux. Plus précisément on peut montrer :

LEMME: *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors il existe deux suites de fonctions en escalier g_n et h_n telles que sur $[a,b]$ telles que, pour tout $n \geq 1$ et $t \in [a,b]$ on ait*

(i) $g_n(t) \leq g_{n+1}(t) \leq f(t) \leq h_{n+1}(t) \leq h_n(t)$

(i) $0 \leq h_n(t) - g_n(t) \leq 1/n$.

Démonstration: (en partie admis) En découpant $[a,b]$ en un nombre fini d'intervalles et en prolongeant par continuité f sur chaque intervalle ouvert où elle est continue on se ramène au cas où f est continue sur $[a,b]$. On utilise alors le fait (admis ici) qu'elle est *uniformément continue*, c'est à dire qu'il existe $\delta = \delta(n)$ tel que $|x - x'| \leq \delta$ entraîne $|f(x) - f(x')| \leq 1/2n$. On choisit une subdivision de pas $\leq \delta(n)$ et on définit h_n comme le maximum (resp. g_n comme le minimum) de f sur chaque intervalle de la subdivision. Les suites aisni construites ont toutes les propriétés voulues sauf peut-être la monotonie. Il suffit alors de remplacer h_n et g_n par $h'_n = \min_{1\leq m\leq n} h_m$ et $g'_n = \max_{1\leq m\leq n} g_m$. □

Si l'on choisit g_n et h_n comme dans le lemme, alors les suites $v_n = \int_a^b h_n(t)dt$ et $u_n = \int_a^b g_n(t)$ sont adjacentes et leur limite définit $\int_a^b f(t)dt$. □

Observons aussi qu'il découle de ces constructions que si par exemple f est continue par morceaux alors

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \frac{(b-a)}{n} = \int_a^b f(t)dt$$

Par exemple si $f(t) = t^2$ et $[a, b] = [0, 1]$ on en tire que

$$\int_0^1 t^2 dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Ce que l'on vérifiera par la suite bien sûr par une autre méthode.

15.2 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

Rassemblons en un théorème les principales propriétés de l'intégrale :

THÉORÈME: *Soient f, g des fonctions continues par morceaux, l'intégrale vérifie les propriétés suivantes :*
i) (Linéarité)

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt,$$

ii) (Positivité)

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$$

de plus si les fonctions sont continues et on a $f(t_0) > g(t_0)$ en un point t_0 appartenant à l'intevalle $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt > \int_a^b g(t)dt$,
iii)

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

iv) ("formule de 'Chasles") Si $a < c < b$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Démonstration: Le principe est d'établir ces formules pour les fonctions en escalier et d'en déduire la formule dans le cas général par passage à la limite. (i) La linéarité de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$ est claire pour les fonctions en escaliers. En effet la somme ne dépend pas de la subdivision choisie (c'est clair sur le dessin, pouvez-vous en écrire la preuve formelle?) et en choisissant une subdivision adaptée aux deux fonctions en escalier f et g la linéarité provient de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Soit donc f_n et g_n des fonctions en escalier telles que $|f_n - f| \leq 1/n$ et

$|g_n - g| \leq 1/n$, alors $|(\lambda f_n - \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)| \leq (|\lambda| + |\mu|)/n$ et donc, en passant à la limite

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt &= \lim \int_a^b (\lambda f_n + \mu g_n)(t)dt \\ &= \lim \left(\lambda \int_a^b f_n(t)dt + \mu \int_a^b g_n(t)dt \right) \\ &= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt\end{aligned}$$

(ii) Vu la linéarité, il suffit de vérifier que si f est positive alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Mais il existe une suite de fonction en escalier $f_n \geq f$ telle que $\lim \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$; or bien sûr $\int_a^b f_n(t)dt$ est somme de termes positifs donc est positif. La deuxième affirmation provient de ce que, si f est continue et, disons, $f(c) \neq 0$ avec $c \in [a, b]$ alors il existe un intervalle $[d, e] \subset [a, b]$ (avec $d < e$) sur lequel $f(x) \geq f(c)/2$ et donc $\int_a^b f(t)dt \geq (e-d)c/2 > 0$.

(iii) Si f est une fonction en escalier égale à c_i sur $]a_i, a_{i+1}[$ alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|(a_{i+1} - a_i) = \int_a^b |f(t)|dt$$

L'inégalité pour une fonction intégrable s'en déduit par passage à la limite.

(iv) De nouveau il suffit de démontrer la formule pour une fonction en escalier, ce qui est immédiat. □

Remarques : 1) à condition de définir, lorsque $b < a$, l'intégrale par $\int_a^b f(t)dt := -\int_b^a f(t)dt$ la formule (iv) est valable quelque soit a, b, c.

2) Si $m \leq f(t) \leq M$ sur l'intervalle $[a, b]$, on déduit aisément de (ii) et du calcul $\int_a^b dt = (b-a)$ l'inégalité

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

15.3 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRATION

Définition: Une *primitive* d'une fonction f est une fonction F dérivable telle que $F' = f$

Remarque : Sur un intervalle I une primitive (si elle existe) est unique à une constante près. En effet si F_1 et F_2 sont deux primitives, on voit que $F_1 - F_2$ a une dérivée nulle donc est constante.

Il est difficile de surestimer l'importance du théorème suivant :

THÉORÈME: (théorème fondamental de l'intégration) *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ alors une primitive F est donnée par la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et si F est une primitive de f on a la formule :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration: Il suffit de vérifier que la fonction $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et vérifie $G'(x) = f(x)$ car alors on aura bien prouvé l'existence d'une primitive et comme $G(a) = 0$ on a bien $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ et si F est une autre primitive de f on a $F(x) = G(x) + C$ donc $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $a \leq x < x + h \leq b$, les propriétés de l'intégrale permettent d'écrire :

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt$$

mais f est continue en x donc il existe δ tel que si $x \leq t \leq x+h \leq x+\delta$ alors $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon$ donc on obtient (si $|h| \leq \delta$) :

$$\left|\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt\right) = \varepsilon$$

Ce qui exprime bien que G est dérivable et que $G'(x) = f(x)$ □

L'importance de ce théorème vient du fait qu'il permet de calculer la plupart des aires (ou intégrales) de manière assez simple. Nous étudierons plus systématiquement le calcul des primitives au chapitre 17 et donnons l'exemple très simple suivant :

$$\int_a^b t^m dt = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

En particulier $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$ comme nous l'avons déjà vérifié.

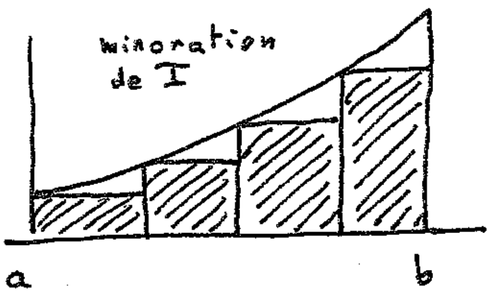
15.4 CALCULS APPROCHÉS D'INTÉGRALES

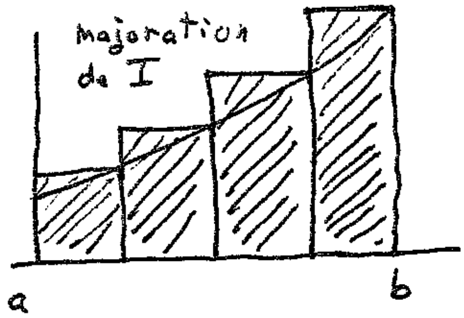
Nous développerons au chapitre 17 des techniques de calcul de primitives et donc d'intégrales mais ces techniques ne s'appliquent pas à toutes les fonctions et il est souhaitable de pouvoir évaluer ces intégrales. Par exemple la fonction logarithme est définie comme $\log(x) := \int_1^x dt/t$ *donc si l'on veut établir une table de logarithmes, il faut savoir calculer de manière approchée une intégrale. De nos jours, bien sûr, ces calculs sont programmés sur ordinateurs mais, demandez à vos parents (ou grands-parents) de vous montrer une vieille table de logarithmes Bouvard et Ratinet (dont le nom semble avoir inspiré Flaubert pour son oeuvre inachevée "Bouvard et Pécuchet").*

Commençons par le cas légèrement plus facile des fonctions monotones. Si $f(x)$ est croissante et $a < b$ on observe que $f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq f(b)(b-a)$ donc plus généralement si $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ est une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(a_{i+1}-a_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})(a_{i+1}-a_i)$$

En particulier si l'on choisit $a_i := a + (i/n)(b-a)$ et si l'on pose $S_n(f) := \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$ on en tire $S_n(f) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S_n(f) + \frac{(b-a)}{n}(f(b)-f(a))$ d'où un calcul approché de l'intégrale. Ce type de calcul est illustré par la figure suivante :





On peut aussi utiliser le même calcul pour estimer des sommes. Par exemple en prenant la fonction décroissante $f(x) = 1/x^a$ (avec $a > 0$) on obtient

$$\sum_{n=2}^{N} 1/n^a \leq \int_1^N dt/t^a \leq \sum_{n=1}^{N-1} 1/n^a$$

En utilisant le théorème fondamental de l'intégration et, pour $a = 1$, la définition du logarithme, on sait que $\int_1^N dt/t^a = \left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{N^{a-1}} - 1\right)$ si $a \neq 1$ et $\int_1^N dt/t^a = \log N$ si $a = 1$. Ainsi, si $a \neq 1$ on a :

$$\left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{N^{a-1}} - 1\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^a} \leq 1 + \left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{N^{a-1}} - 1\right)$$

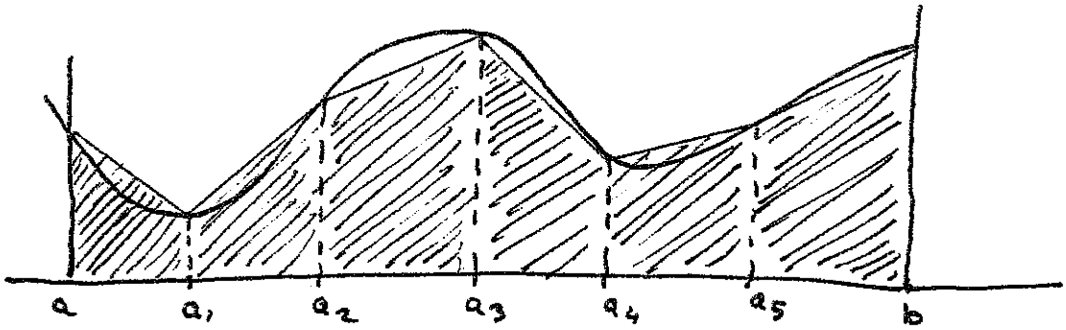
et si $a = 1$ on obtient :

$$\log N \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \log N$$

On peut conclure par exemple que $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$.

Remarque : il n'est peut-être pas inutile de remarquer, pour ceux qui aiment expérimenter sur machine, que, si l'on programme le calcul de la suite $u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, celle-ci semble converger!

Donnons maintenant une manière un peu plus générale et plus fine d'approcher la valeur d'une intégrale. L'idée est d'approcher la fonction par une fonction linéaire par morceau comme dans la figure ci-dessous :



THÉORÈME: *(méthode des trapèzes) Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable et soit M un majorant de f'' sur l'intervalle et $a_i := a + \frac{i(b-a)}{n}$ alors*

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + f(a_1) + \ldots + f(a_{n-1})\right)\right| \leq \frac{M}{12n^2}(b-a)^3$$

Démonstration: On procède en intégrant par parties puis en choisissant judicieusement les constantes d'intégration.

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = [(t-\lambda)f(t)]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} (t-\lambda)f'(t)dt$$

$$= [(t-\lambda)f(t)]_{a_i}^{a_{i+1}} - \left[\left(\frac{t^2}{2} - \lambda t - \mu\right) f'(t)\right]_{a_i}^{a_{i+1}} + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\frac{t^2}{2} - \lambda t - \mu\right) f''(t)dt$$

Pour éviter d'avoir à calculer les dérivées $f'(a_i)$, on s'arrange pour que le deuxième crochet s'annule, c'est-à-dire que l'on choisit $t^2 - 2\lambda t - 2\mu = (t-a_i)(t-a_{i+1})$ donc $\lambda = (a_i + a_{i+1})/2$ et on obtient :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = \frac{f(a_{i+1}) + f(a_i)}{2n} + \frac{1}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}} (t-a_i)(t-a_{i+1})f''(t)dt$$

or cette dernière intégrale est bornée en module par $\frac{M}{2}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(t-a_i)(a_{i+1}-t)dt = \frac{M(b-a)^3}{12n^3}$. En sommant les inégalités on obtient l'énoncé. □

Commentaires : la majoration énoncé est intéressante dès les premiers pas ; elle s'écrit pour $n=1$:

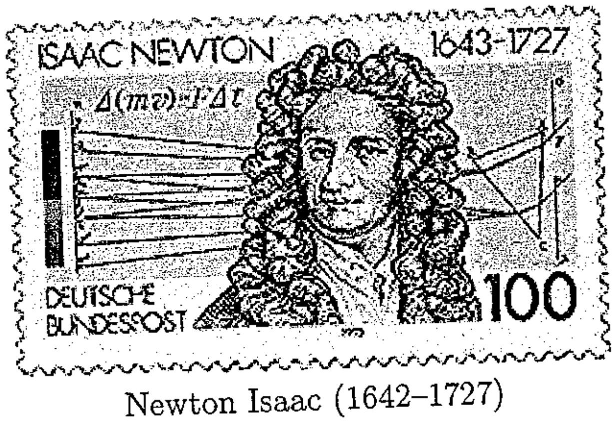
$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))\right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3$$

Pour $n=2$ on obtient :

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \frac{(b-a)}{2}\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{48}(b-a)^3$$

La majoration est meilleure si M est petit (c'est-à-dire si la fonction n'oscille pas trop) et si n est grand (c'est-à-dire si la subdivision est fine) et moins bonne si $(b-a)$ est grand (c'est-à-dire si l'intervalle d'intégration est grand).

Exemple : (calcul approché de $\log 2$) Prenons $a = 1$, $b = 2$, $n = 4$ et $f(t) = 1/t$. On a $\max_{t\in[1,2]} |f''(t)| = 2$ et $S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = 0,69702\ldots$ et donc la valeur approchée : $|\log 2 - S_4| \leq 0,010166\ldots$.



Newton Isaac (1642–1727)

CHAPITRE 16 QUELQUES FONCTIONS USUELLES

Ce chapitre est destiné à fournir une bibliothèque de fonctions utiles : les fonctions polynômes (déjà étudiées au chapitre 6), la fonction logarithme, l'exponentielle (et plus généralement les fonctions a^x ou x^a), les fonctions circulaires $\sin(x)$, $\cos(x)$ *et* $\mathrm{tg}(x)$ *ainsi que leurs "réciproques"* $\mathrm{Arcsin}(x)$, $\mathrm{Arcos}(x)$ *et* $\mathrm{Arctg}(x)$. *Les fonctions hyperboliques* $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ *et* $\mathrm{th}(x)$ *et leurs "réciproques"* $\mathrm{Argsh}(x)$, $\mathrm{Argch}(x)$ *et* $\mathrm{Argth}(x)$ *– ces dernières étant moins indispensables puisque l'on peut les exprimer à partir du logarithme et de l'exponentielle.*

16.1 FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

Définition: On appelle *logarithme* la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ à valeurs réelles :

$$\log(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

On voit immédiatement que $\log(1) = 0$ et que $\log(x) > 0$ pour $x > 1$ (resp. $\log(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$).

THÉORÈME: *La fonction* $\log : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *est croissante, continue, indéfiniment dérivable ; en fait*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

De plus la fonction log *est une bijection et un homomorphisme de groupe (elle transforme multiplication en addition)*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

Démonstration: D'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction log a pour dérivée $1/x$ et est donc croissante. Ensuite $\frac{d}{dx}\log(xy) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$ donc $\log(xy) - \log x$ est une fonction constante en x. En prenant $x = 1$, on voit que cette constante vaut $\log y$, d'où la formule $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. On en déduit que $\log(2^n) = n\log(2)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et comme log est croissante cela entraîne que $\log(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Enfin comme $\log(x) = -\log(1/x)$ on en tire que lorsque x tend vers zéro (par valeurs positives) $\log(x)$ tend vers $-\infty$. □

Remarque : Nous ne considérerons que cette fonction logarithme appelée parfois logarithme néperien. Historiquement, on utilisait pour les calculs "à la main" le logarithme décimal c'est-à-dire $\log_{10} x = \log x / \log 10$. La généralisation des calculatrices et ordinateurs a rendu désuètes les tables de logarithmes et enlevé son intérêt au logarithme décimal.

Définition: La bijection réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction *exponentielle* et se note $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$.

THÉORÈME: La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable et croissante ; en fait $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$. De plus

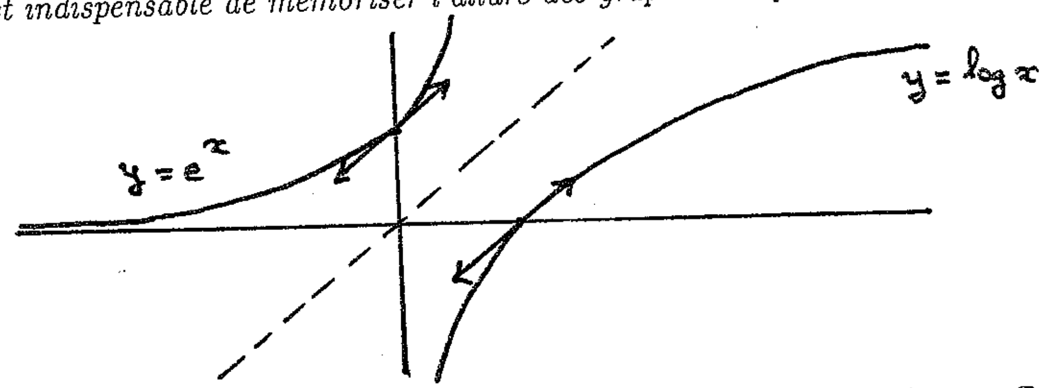
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

et on a

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Démonstration: On a déjà vu que $\exp(x)$ est égale à sa dérivée ; ensuite les limites découlent de celles calculées pour les logarithmes au théorème précédent ainsi que la dernière formule. □

Il est indispensable de mémoriser l'allure des graphes des fonctions usuelles



Remarque : Soit $n \in \mathbf{N}$ (ou même $n \in \mathbf{Z}$) alors $x^n = \exp(n\log(x))$; en effet d'après le théorème précédent on a $\exp(\log(x) + \ldots + \log(x)) = (\exp(\log(x)))^n = x^n$. Ceci suggère la possibilité de définir a^b ainsi :

Définition: (Puissances généralisées) Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $b \in \mathbf{R}$ on pose

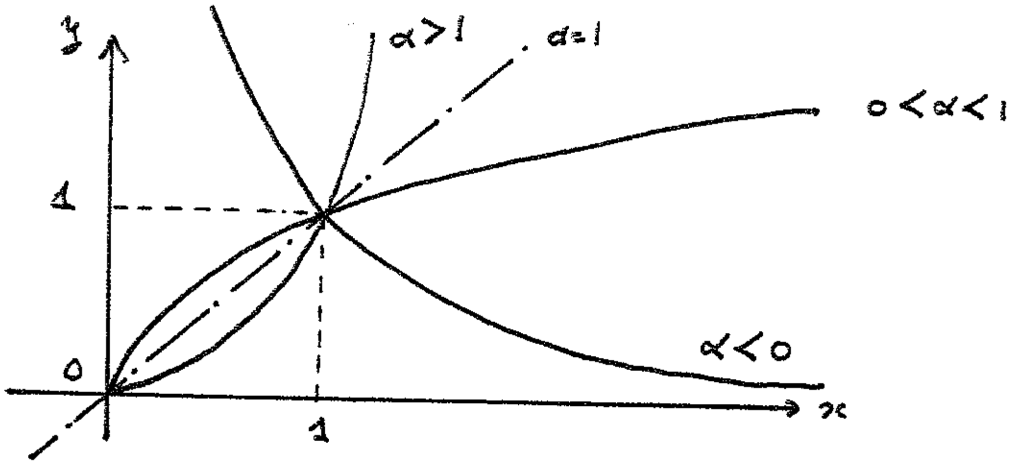
$$a^b := \exp(b\log a)$$

En particulier, on retrouve pour $n \in \mathbf{N}^*$ les fonctions "racine n-ième" : $a^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log a)$.

THÉORÈME: *On a les formules suivantes, pour $a, a' > 0$ et $b, c \in \mathbf{R}$:*
$a^{b+b'} = a^b a^{b'}$
$(aa')^b = a^b a'^b$
$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
$a^0 = 1 = 1^b$
De plus $\frac{d}{dx}\left(x^b\right) = bx^{b-1}$ *et* $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \log(a)a^x$.

Démonstration: Ces formules découlent immédiatement de la définition et des propriétés de l'exponentielle et du logarithme : par exemple $a^{b+b'} = \exp((b+b')\log a) = \exp(b\log a)\exp(b'\log a)$ et $\frac{d}{dx}\left(x^b\right) = \frac{d}{dx}\left(\exp(b\log x)\right) = b\frac{d}{dx}(\log x)\exp(b\log x) = bx^{b-1}$.
□

L'allure des graphes des fonctions $f(x) = x^a$ est la suivante :



Définition: On appelle *base du logarithme* le nombre e tel que $\log(e) = 1$ ou $1 = \int_1^e \frac{dt}{t}$ ou encore $e = \exp(1)$.

Remarque : on a vu que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!})\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Notation : On a donc $\exp(x) = e^x$ et on utilisera désormais cette notation.

THÉORÈME:

i) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^a(\log x)^n = 0$ *si* $a > 0$ *et* $n \in \mathbf{Z}$

$\lim_{x\to+\infty} x^a(\log x)^n = 0$ *si* $a < 0$

C'est-à-dire "les puissances l'emportent sur le logarithme"

ii) $\lim_{x\to+\infty} x^a e^x = +\infty$ *et*

$\lim_{x\to-\infty} x^a e^x = 0$

C'est-à-dire "l'exponentielle l'emporte sur les puissances"

Démonstration: i) Remarquons que pour x supérieur à un on a :

$$\log(x) = \int_1^x dt/t \le \int_1^x dt/\sqrt{t} = (1/2)(\sqrt{x} - 1),$$

ainsi donc $\log(x)/x$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. De façon plus générale $(\log x)^n/x^a = ((n/a)^n \left(\log x^{a/n}/x^{a/n}\right)^n$ tend donc aussi vers zéro quand x tend vers l'infini. Les autres limites s'obtiennent par des calculs similaires. □

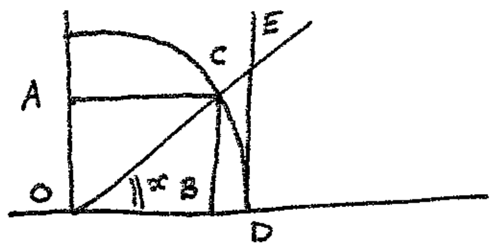
16.2 FONCTIONS CIRCULAIRES ET RÉCIPROQUES

Commençons par quelques rappels sur les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Tout d'abord prouvons l'énoncé admis aux chapitres précédents.

PROPOSITION:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Démonstration: Considérons un cercle de rayon r (avec des angles mesurés en radian) :



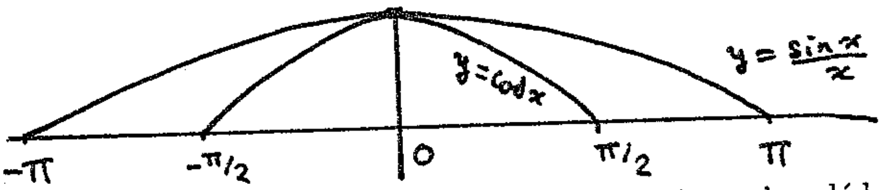
Nous allons utiliser deux faits géométriques assez simples : l'aire d'un secteur angulaire (d'angle x) est donné par $xr^2/2$ et la longueur de l'arc de cercle est donnée par xr (en particulier la surface du cercle est πr^2 et sa circonférence $2\pi r$), pour démontrer l'inégalité suivante :

LEMME: *Soit* $0 < x \leq \pi/2$ *alors* $\sin(x) < x < \mathrm{tg}(x)$.

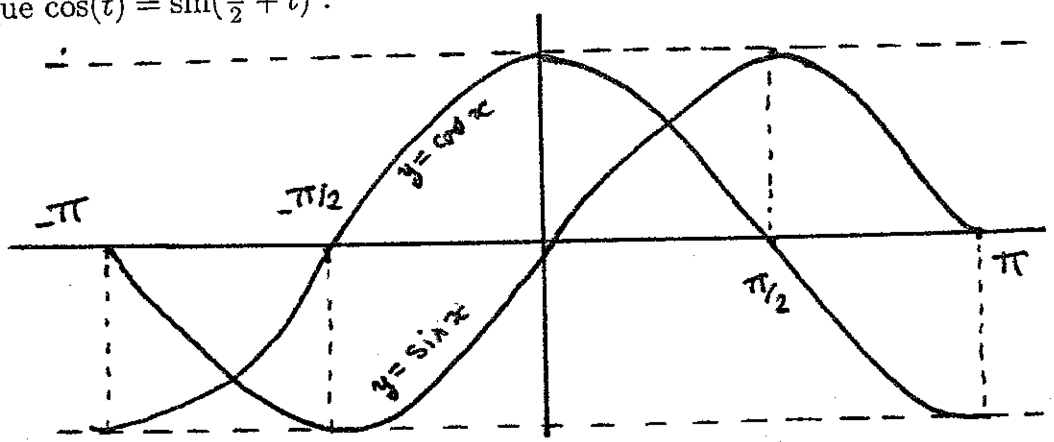
Démonstration: Appelons x l'angle sur la figure ci-dessus en prenant $r = 1$; alors $\sin(x) = OA = CB \leq CD \leq arc(CD) = x$. Par ailleurs l'aire du secteur d'angle x est égale à $x/2$ et est majorée par l'aire du triangle OED qui vaut $ED/2 = \mathrm{tg}(x)/2$ d'où le lemme. □

COROLLAIRE: *Pour* $0 < |x| \leq \pi/2$ *on a* $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$ *; en particulier* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Démonstration: En effet on obtient pour $0 < x < \pi/2$ l'inégalité $\cos(x) < \sin(x)/x < 1$ qui est donc valable pour $0 < |x| < \pi/2$ puisque $\cos(x)$ et $\sin(x)/x$ sont paires ; enfin comme $\cos(x)$ est continue on a $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$. □



Traçons le graphe de la fonction sinus, celui de cosinus s'en déduit par translation puisque $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} + t)$:



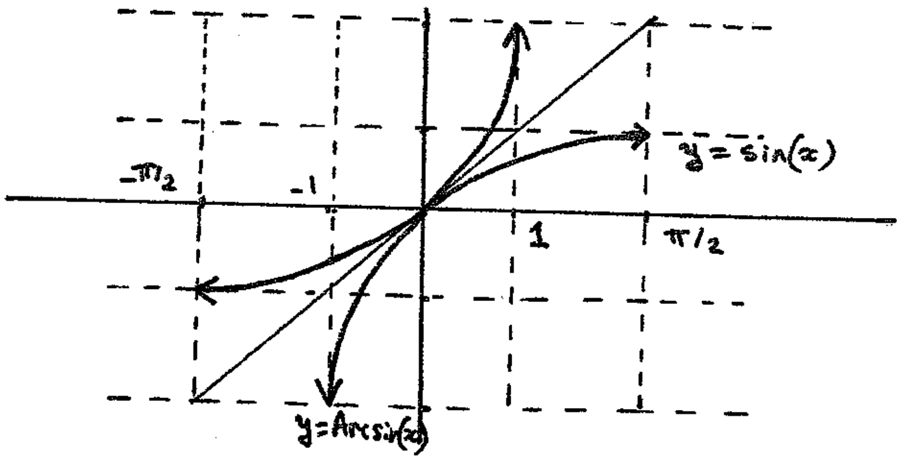
FORMULAIRE :
$\sin(-t) = -\sin(t)$, $\cos(-t) = \cos(t)$ et $\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}(t)$
$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$, $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ et $\mathrm{tg}(t+\pi) = \mathrm{tg}(t)$
$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$
$\sin(x+t) = \cos(t)\sin(x) + \cos(x)\sin(t)$ et $\cos(x+t) = \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t)$
$\mathrm{tg}(x+t) = (\mathrm{tg}(t) + \mathrm{tg}(x))/(1 - \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{tg}(t))$
$\sin(t) = 2\,\mathrm{tg}(t/2)/(1+\mathrm{tg}^2(t/2))$ et $\cos(t) = (1-\mathrm{tg}^2(t/2))/(1+\mathrm{tg}^2(t/2))$

On peut aussi signaler que $\cos(t) = \cos(x)$ équivaut à $t = \pm x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$) alors que $\sin(t) = \sin(x)$ équivaut à $t = x + 2k\pi$ ou $t = \pi - x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$). On peut aussi observer que $a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$ où ϕ est tel que $\sin(\phi) = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\cos(\phi) = b/\sqrt{a^2+b^2}$.

La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est une bijection (strictement) croissante ; en effet il suffit d'utiliser le théorème du chapitre 13.

Définition: ("Arc sinus") La bijection réciproque de la fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1,+1]$ se note $\mathrm{Arcsin} : [-1,+1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

On peut en tracer le graphe par symétrie à partir de celui de $\sin(x)$:



THÉORÈME: *La fonction* Arcsin : $[-1,+1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ *est continue, croissante, impaire et vérifie :*

i) $y = \mathrm{Arcsin}(x) \Leftrightarrow \{x = \sin(y) \text{ et } y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\}$

ii) $\mathrm{Arcsin}(x)$ *est indéfiniment dérivable sur* $]-1,+1[$ *et*

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

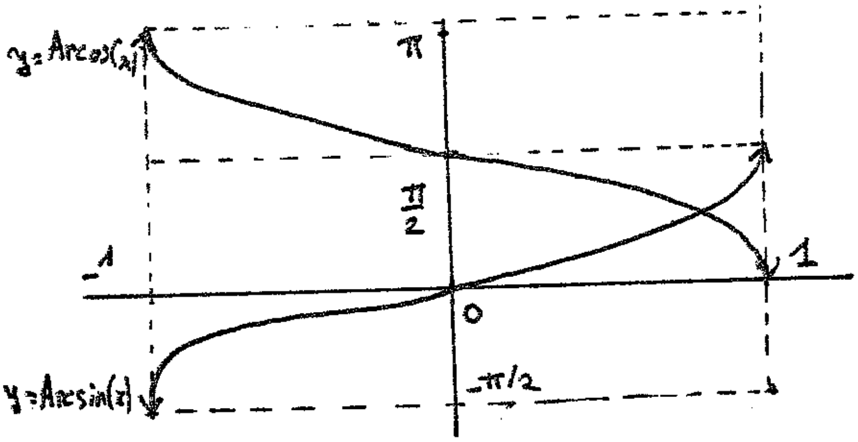
Démonstration: i) Découle de la définition de Arcsin comme bijection réciproque.

ii) Provient du théorème donnant la dérivée d'une fonction réciproque : si $x = \sin(y)$ et $y \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ alors $dx/dy = \cos(y) > 0$ et donc vaut $\sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$ d'où $dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$. □

On peut faire une construction analogue en observant que $\cos : [0,\pi] \to [-1,+1]$ est une bijection décroissante.

Définition: ("Arc cosinus") La bijection réciproque de la fonction cos : $[0,\pi] \to [-1,+1]$ se note Arcos : $[-1,+1] \to [0,\pi]$.

On peut en tracer le graphe par symétrie à partir de celui de $\cos(x)$:



Toutes les propriétés de la fonction Arcos(x) se déduisent de celle de Arcsin(x) et de la formule suivante (visible sur le graphe) :

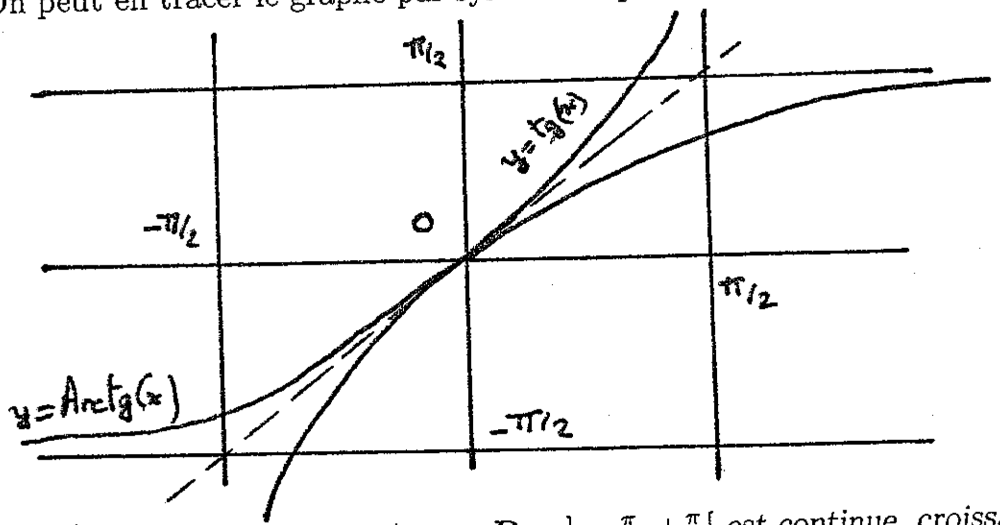
PROPOSITION: *Si* $x \in [-1,+1]$ *on a* $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcos}(x) = \pi/2$

Démonstration: On calcule (comme pour Arcsinus) que $\text{Arcos}'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$ donc la dérivée de la fonction $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcos}(x)$ est nulle, donc la fonction est constante et en calculant la valeur en $x = 0$ on conclut. □

La fonction tg $:]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ est une bijection (strictement) croissante ; en effet il suffit d'utiliser le théorème du chapitre 13.

Définition: ("Arc tangente") La bijection réciproque de la fonction tg $:]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ se note Arctg : $\mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$.

On peut en tracer le graphe par symétrie à partir de celui de $\text{tg}(x)$:



THÉORÈME: *La fonction* Arctg : $\mathbf{R} \to]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ *est continue, croissante, impaire et vérifie :*

i) $y = \text{Arctg}(x) \Leftrightarrow x = \text{tg}(y)$ et $y \in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$

ii) $\mathrm{Arctg}(x)$ *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et*

$$\mathrm{Arctg}'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

iii) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$

Démonstration: i) et iii) découlent de la défintion de Arctg comme bijection réciproque. ii) Le calcul est similaire à ceux déjà effectués : si $x = \mathrm{tg}(y)$ alors $dx/dy = (1 + \mathrm{tg}^2(y)) = 1 + x^2$ donc $dy/dx = 1/(1+x^2)$. □

Remarque : La fonction Arctg vérifie une intéressante équation fonctionnelle :

PROPOSITION: *Soit* $x \in \mathbf{R}^*$ *alors* $\mathrm{Arctg}(x) + \mathrm{Arctg}(1/x) = sgn(x)\frac{\pi}{2}$ *(où le signe* $sgn(x)$ *vaut* $+1$ *si* $x > 0$ *et* -1 *si* $x < 0$*).*

Démonstration: Le calcul de la dérivée du membre de gauche donne : $(\mathrm{Arctg}(x) + \mathrm{Arctg}(1/x))' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} = 0$ donc cette fonction est constante sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ (notez qu'elle n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$ tout entier!). Par ailleurs $\mathrm{Arctg}(1) = \pi/4$ et $\mathrm{Arctg}(-1) = -\pi/4$ permettent de calculer ces constantes. □

16.3 FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET RÉCIPROQUES

On peut définir des fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques et travailler avec elles de manière tout-à-fait analogue. Nous serons brefs car ces fonctions sont moins importantes que les "vraies" fonctions sinus, cosinus et tangente.

Définition: La fonction *sinus hyperbolique* est définie par

$$\mathrm{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La fonction *cosinus hyperbolique* est définie par

$$\mathrm{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

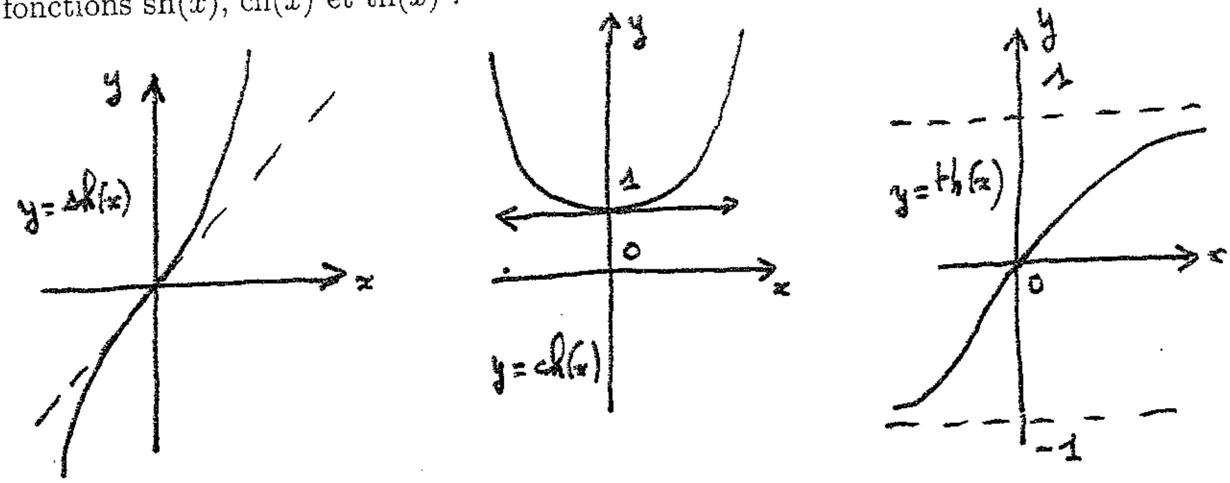
La fonction *tangente hyperbolique* est définie par

$$\mathrm{th}(x) := \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Le nom de ces fonctions vient du fait que $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ paramétrise le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$ alors que $t \mapsto (\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ paramétrise (une branche de) l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Une autre explication (que nous ne formaliserons pas) aux noms et analogies entre fonctions circulaires et hyperboliques est la suivante : on se souvient que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ *et* $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ *et on en tire (formellement) que* $\mathrm{ch}(x) = \cos(ix)$ *et* $\mathrm{sh}(x) = i\sin(ix)$

Donnons les représentations graphiques des trois principales fonctions hyperboliques, les fonctions $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$:



Passons à la construction des fonctions réciproques

La fonction sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une bijection croissante, donc :

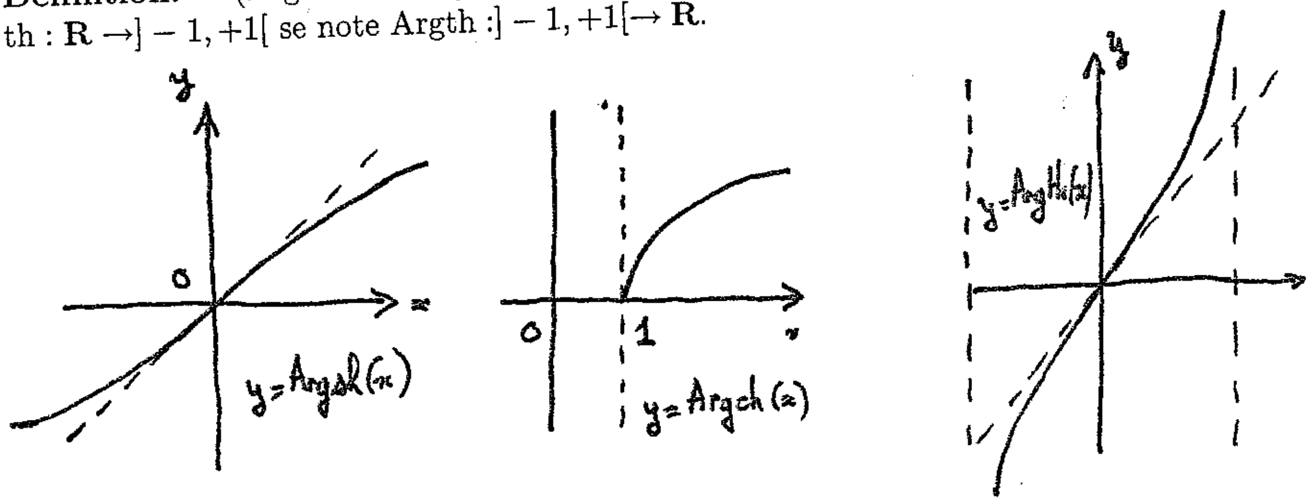
Définition: (Argument sinus hyperbolique) La bijection réciproque de la fonction sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se note Argsh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

La fonction ch : $\mathbf{R}_+ \to [1, +\infty)$ est une bijection croissante, donc :

Définition: (Argument cosinus hyperbolique) La bijection réciproque de la fonction ch : $\mathbf{R}_+ \to [1, +\infty)$ se note Argch : $[1, +\infty) \to \mathbf{R}_+$.

La fonction th : $\mathbf{R} \to]-1, +1[$ est une bijection croissante, donc :

Définition: (Argument tangente hyperbolique) La bijection réciproque de la fonction th : $\mathbf{R} \to]-1, +1[$ se note Argth : $]-1, +1[\to \mathbf{R}$.



THÉORÈME: *Les fonctions* Argsh, Argch *et* Argth *son continues sur leurs domaine de définition et dérivable à l'intérieur de celui-ci, de plus :*

i) $\mathrm{Argsh}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\mathrm{Argsh}(t) = \log(t + \sqrt{t^2+1})$

ii) $\mathrm{Argch}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ et $\mathrm{Argch}(t) = \log(t + \sqrt{t^2-1})$

iii) $\operatorname{Argth}'(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$ *et* $\operatorname{Argth}(t) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$

Démonstration: Les trois énoncés se démontrent de manière similaire ; prouvons le premier : si $x = \operatorname{sh}(y)$, alors $dx/dy = \operatorname{ch}(y) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(y)} = \sqrt{1+x^2}$. Un calcul direct montre que la dérivée de $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; on en tire donc $\operatorname{Argsh}(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C$ et l'évaluation des deux fontion en $x = 0$ donne $C = 0$. □

FORMULAIRE :
$\operatorname{sh}(-t) = -\operatorname{sh}(t)$, $\operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch}(t)$
$\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$
$\operatorname{sh}(x+t) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t)$
$\operatorname{ch}(x+t) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{th}(x+t) = \frac{\operatorname{th}(x)+\operatorname{th}(t)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(t)}$
$\operatorname{sh}(t) = \frac{2\operatorname{th}(t/2)}{1-\operatorname{th}^2(t/2)}$ et $\operatorname{ch}(t) = \frac{1+\operatorname{th}^2(t/2)}{1-\operatorname{th}^2(t/2)}$
$\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(t) = 2\operatorname{sh}(\frac{x+t}{2})\operatorname{ch}(\frac{x-t}{2})$ et $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(t) = 2\operatorname{ch}(\frac{x+t}{2})\operatorname{ch}(\frac{x-t}{2})$.

Napier (ou Neper) John (1550-1617)