# CHAPITRE 17 CALCUL DE PRIMITIVES

*Nous avons vu au chapitre 15 que le calcul d'une intégrale peut se ramener au calcul d'une primitive de la fonction à intégrer. Nous avons constitué au chapitre 16 une bibliothèque de fonctions usuelles. Un espoir un peu naïf consisterait à penser que les primitives de ces fonctions usuelles s'exprime de nouveau à partir de ces fonctions usuelles. Mais des fonctions comme* $\exp(-t^2)$ *ou* $\frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ *détruisent cet espoir : les fonctions* $N(x) := \int_0^x \exp(-t^2)dt$ *et* $M(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ *ne peuvent pas s'exprimer à partir des fonctions usuelles ; on peut néanmoins étudier et utiliser ces fonctions (la fonction normale* $N$ *est utilisée en statistiques et probabilités et la fonction* $M$ *– liée aux fonctions elliptiques – est utilisée en physique et dans diverses branches des mathématiques). Après tout la fonction logarithme a été introduite pour donner une primitive à la fonction* $\frac{1}{x}$. *Il existe ainsi une théorie du calcul formel de primitives qui est assez complexe ; nous nous contenterons donc d'étudier un certain nombre de techniques ou "recettes" permettant de calculer (d'exprimer en termes de fonctions usuelles) quelques primitives.*

## 17.1 QUELQUES PRIMITIVES CLASSIQUES

Rappelons que sur un intervalle, une primitive d'une fonction continue existe et est unique à une constante près. Introduisons la notation fort commode suivante

**Notation** L'écriture $\int f(t)dt$ désignera une primitive de la fonction $f$.

Il ne faut pas confondre $\int_a^b f(t)dt$, qui est un nombre et $\int f(t)dt$ qui désigne une fonction ; par exemple on écrira $\int \frac{dt}{t^2+1} = \mathrm{Arctg}(t) + C$.

Il faut faire la remarque qu'il y a parfois une façon assez "bête" de calculer des primitives : si on trouve (par quelque procédé que ce soit) une fonction $F(t)$ dont on sait calculer la dérivée et qui vérifie $F'(t) = f(t)$, alors on a bien sûr trouvé une primitive de $f$. Commençons ici par une liste de primitives assez faciles à établir :

| fonction | primitive | |
|---|---|---|
| $t^a$ | $\dfrac{t^{a+1}}{a+1} + C$ | si $a \neq -1$ |
| $t^{-1}$ | $\log\lvert t\rvert + C$ | |
| $e^{at}$ | $\dfrac{e^{at}}{a} + C$ | |
| $a^t$ | $\dfrac{a^t}{\log(a)} + C$ | si $a > 0$ |
| $\cos(t)$ | $\sin(t) + C$ | |
| $\sin(t)$ | $-\cos(t) + C$ | |

| fonction | primitive | |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{\cos(t)}$ | $\log\left\|\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|+C$ | si $t \notin \dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z}$ |
| $\dfrac{1}{\sin(t)}$ | $\log\left\|\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right\|+C$ | si $t \notin \pi\mathbf{Z}$ |
| $\operatorname{tg}(t)$ | $-\log\|\cos(t)\|+C$ | si $t \notin \dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z}$ |
| $\operatorname{cotg}(t)$ | $\log\|\sin(t)\|+C$ | si $t \notin \pi\mathbf{Z}$ |
| $\operatorname{ch}(t)$ | $\operatorname{sh}(t)+C$ | |
| $\operatorname{sh}(t)$ | $\operatorname{ch}(t)+C$ | |
| $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}+C$ | $2\operatorname{Arctg}(e^t)+C$ | |
| $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(t)}+C$ | $\log\left\|\operatorname{th}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right\|+C$ | si $t \neq 0$ |
| $\operatorname{th}(t)$ | $\log\operatorname{ch}(t)+C$ | |
| $\operatorname{coth}(t)$ | $\log\|\operatorname{sh}(t)\|+C$ | si $t \neq 0$ |
| $\dfrac{1}{t^2+a^2}$ | $\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{t}{a}\right)+C$ | |
| $\dfrac{1}{t^2-a^2}$ | $\dfrac{1}{2a}\log\left\|\dfrac{t-a}{t+a}\right\|+C$ | si $t \neq \pm a$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$ | $\log\|t+\sqrt{t^2+a^2}\|+C$ | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}$ | $\log\|t+\sqrt{t^2-a^2}\|+C$ | si $\|t\|>\|a\|$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}$ | $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{t}{a}\right)+C$ | si $\|t\|<\|a\|$ |

Remarque : on peut souvent donner plusieurs expressions d'une primitive et, dans ce cas, ces expressions sont égales à une constante près. Par exemple une primitive de $\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$ est aussi $\operatorname{Argsh}\left(\frac{t}{|a|}\right)$ ; une primitive de $\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}$ est aussi $\operatorname{Argch}\left(\frac{t}{|a|}\right)$ (si $t>0$) ou

Argch $\left(\frac{|t|}{|a|}\right)$ (si $t < 0$).

**Démonstration:** La plupart de ces formules ont déjà été établies et de toutes façons peuvent se vérifier directement en dérivant ; dans la partie suivante on donne des techniques générales permettant d'ailleurs de les retrouver. Par exemple calculons la dérivée de la fonction $f(t) := \log|\operatorname{tg}(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})|$ :

$$f'(t) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}'(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg}(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\operatorname{tg}(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})\cos^2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{\sin(2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{\cos(t)}$$

.

## 17.2 TECHNIQUES GÉNÉRALES

On considère dans ce paragraphe uniquement des fonctions $f$, $g$, etc continues réelles.

**Linéarité :** soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $f, g$ continues :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b f(t)dt$$

Exemple : nous savons (voir les formules étudiées au chapitre 4 donnant $\cos(nt)$ comme polynôme en $\cos(t)$) que :

$$\cos^4(t) = \frac{1}{8}(\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3)$$

donc on en déduit :

$$\int \cos^4(t)dt = \frac{1}{32}(\sin(4t) + 8\sin(2t) + 12t) + C$$

Ainsi, par exemple, $\int_0^{\pi/2} \cos^4(t)dt = 3\pi/16$. Le même style de calcul permet d'intégrer sans difficultés $\cos^m(t)$ ou $\sin^m(t)$ (au moins si $m$ n'est pas trop grand).

**Intégration par parties :**

**THÉORÈME:** *Soient $f, g$ deux fonctions continûment dérivables, alors :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

**Démonstration:** Il suffit d'intégrer la relation entre dérivées $fg' = (fg)' - f'g$. □

Sous forme mnémotechnique on retiendra : $\int udv = uv - \int vdu$.

Exemples :

1) en prenant $u := \log(t)$, $v := t$ on obtient :

$$\int \log(t)dt = t\log(t) - \int dt = t\log(t) - t + C$$

Plus généralement si $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et $m \in \mathbf{N}$, posons $u = \log^m(t)$ et $v = \frac{t^{a+1}}{a+1}$ ; on obtient alors

$$\int t^a \log^m(t)dt = \frac{1}{a+1}t^{a+1}\log^m(t)dt - \frac{m}{a+1}\int t^a \log^{m-1}(t)dt$$

Cette formule, appliquée $m$ fois permet d'exprimer la primitive cherchée sous la forme $t^{a+1}P(\log(t))$ où $P$ est un polynôme de degré $m$.

2) en prenant $u := t^m$ et $v := e^{at}$ on obtient :

$$\int t^m e^{at}dt = \frac{1}{a}t^m e^{at} - \frac{m}{a}\int t^{m-1}e^{at}dt$$

d'où l'on tire, en itérant $m$ fois, une expression d'une primitive de la forme $e^{at}P(t)$ avec $P$ polynôme de degré $m$.

3) deux intégrations par parties permettent de calculer $I := \int \sin(t)e^{at}dt$ :

$$I = \frac{1}{a}\sin(t)e^{at} - \frac{1}{a}\int \cos(t)e^{at}dt = \frac{1}{a}\sin(t)e^{at} - \frac{1}{a^2}\cos(t)e^{at} - \frac{1}{a^2}\int \sin(t)e^{at}dt$$

d'où

$$I = \frac{1}{1+a^2}(a\sin(t) - \cos(t))e^{at}.$$

4) l'intégration par parties permet aussi de démontrer la formule de Taylor "avec reste intégral" : si $f$ est une fonction $n+1$ fois continument dérivable alors :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

**Démonstration:** La preuve s'effectue par récurrence sur l'entier $n$ : pour $n = 0$, la formule équivaut au théorème fondamental de l'intégration $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$. Si l'on pose $u := f^{(n+1)}(t)$ et $v := -(b-t)^{n+1}/(n+1)!$ alors la formule d'intégration par parties fournit : $\int_a^b \frac{b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \frac{b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$. Cette dernière égalité est exactement celle dont on a besoin pour la récurrence. □

Par exemple, pour la fonction $e^x$ entre 0 et 1 on trouve :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt$$

**Changement de variables :**

**THÉORÈME:** *(première forme) soit $g$ continûment dérivable, $f$ continue, alors :*

$$\int_a^b f \circ g(t)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

**Démonstration:** Considérons les deux fonctions $F_1(x) := \int_a^x f \circ g(t) g'(t) dt$ et $F_2(x) := \int_{g(a)}^{g(x)} f(u) du$ et soit $F$ une primitive de $f$ alors le théorème fondamental donne que $F_1'(x) = f \circ g(x) g'(x)$ et $F_2(x) = F \circ g(x) - F \circ g(a)$ d'où $F_2'(x) = F'(g(x) g'(x) = f \circ g(x) g'(x)$. On en tire que $F_1 - F_2$ est constante, mais $F_1(a) = F_2(a) = 0$ donc $F_1 = F_2$. $\square$

En fait on emploie rarement le théorème de changement de variables sans que la fonction $g$ ne détermine une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle d'extrémités $g(a), g(b)$. Dans ce cas la formule s'écrit (en notant $h := g^{-1}$) sous sa "deuxième forme" :

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f \circ g(t) g'(t) dt = \int_c^d f(u) du$$

Après avoir vérifié que $g$ détermine bien une bijection on peut présenter les calculs de la façon suivante :
(1) On pose $t = g(u)$ ($\Leftrightarrow u = g^{-1}(t)$).
(2) On calcule $dt = g'(u) du$.
(3) On obtient alors $\int f(t) dt = \int f(g(u)) g'(u) du$.

Il n'est pas du tout évident de trouver un "bon" changement de variables mais voici quelques exemples (on donne quelques applications supplémentaires dans le paragraphe suivant) :

1) Dans le domaine $]0, a[$ on cherche à intégrer la fonction $f(t) := (t\sqrt{a^2 - t^2})^{-1}$. Pour cela on choisit le changement de variables $u := a/t$ (ou encore $t := a/u$) qui détermine bien une bijection de tout intervalle $[c, d]$ sur $[a/d, a/c]$ (pourvu que $0 < c < d$) on obtient alors :

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{1}{a} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

On choisit alors le changement de variables $u = \text{ch}(y)$ (possible car $u > 1$) en observant que $\sqrt{u^2 - 1} = \sqrt{\text{ch}^2(y) - 1} = \sqrt{\text{sh}^2(y)} = \text{sh}(y)$ donc

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{\text{sh}(y) dy}{\text{sh}(y)} = y + C = \text{Argch}(u)$$

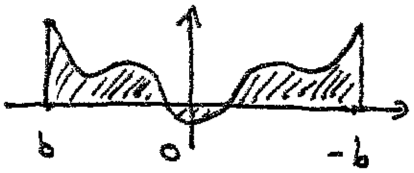
et enfin

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{1}{a} \text{Argch}(u) + C = -\frac{1}{a} \text{Argch}\left(\frac{a}{t}\right) + C$$

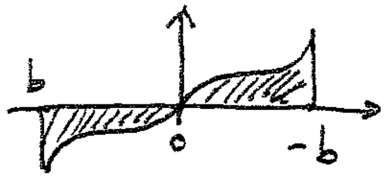
2) En introduisant le changement de variables $u = -t$ on obtient :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-a}^{-b} f(-u)(-du) = \int_{-b}^{-a} f(-u) du$$

En particulier si $f$ est paire on voit que $\int_0^b f(t)dt = \int_{-b}^0 f(t)dt$ alors que si $f$ est impaire $\int_0^b f(t)dt = -\int_{-b}^0 f(t)dt$; graphiquement on obtient :



$f$ paire



$f$ impaire

3) Le changement de variable $u := t + c$ (où $c$ est une constante donne la formule $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(u-c)du$ donc par exemple si la fonction $f$ admet pour période $T$ on obtient $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$ et ensuite $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(u)du$. En effet

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$


## 17.3 PRIMITIVES DE FRACTIONS RATIONNELLES

La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (chapitre 6) permet de ramener le calcul des primitives de fractions rationelles au calcul d'une primitive de $\frac{1}{(t-a)^n}$ et de $\frac{ct+d}{(t^2+at+b)^n}$. La première est très simple : on obtient $\log|t-a|$ si $n=1$ et $\frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$ sinon ; la seconde se ramène au calcul d'une primitive de $\frac{1}{(t^2+1)^n}$ et est un peu plus complexe.

FORMULE 1 :

$$\int \frac{dt}{(t-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(t-a)^{n+1}} + C & \text{si } n \neq 1 \\ \log|t-a| + C & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{ct+d}{(t^2+at+b)^n} = \frac{c}{2}\frac{2t+a}{(t^2+at+b)^n} + \left(d - \frac{ac}{2}\right)\frac{1}{(t^2+at+b)^n}$$

et donc on est ramené par linéarité à intégrer chacun des deux morceaux.

FORMULE 2 :

$$\int \frac{2t+a}{(t^2+at+b)^n}dt = \begin{cases} \frac{-1}{(n-1)(t^2+at+b)^{n-1}} + C & \text{si } n \neq 1 \\ \log|t^2+at+b| + C & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Pour traiter le deuxième membre rappelons que $4b - a^2 > 0$ et notons $\delta := \sqrt{4b - a^2}$ et utilisons la réduction standard d'un polynôme du second degré :

$$t^2 + at + b = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{4} = \frac{\delta^2}{4}\left(\left(\frac{2t+a}{\delta}\right)^2 + 1\right)$$

Ceci suggère d'effectuer le changement de variables $u := \frac{2t+a}{\delta}$ ; on obtient alors :

$$\int \frac{dt}{(t^2 + at + b)^n} = \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-2n} \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$$

On est donc bien ramené à calculer une primitive $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Cela peut se faire ainsi :

$$\left(\frac{u}{(u^2+1)^n}\right)' = \frac{1}{(u^2+1)^n} - \frac{2nu^2}{(u^2+1)^{n+1}} = \frac{1-2n}{(u^2+1)^n} + \frac{2n}{(u^2+1)^{n+1}}$$

En intégrant on obtient la formule de récurrence :

FORMULE 3 : (rappelons qu'on a posé $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$)

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{u}{(u^2+1)^n} + C$$

En particulier

$$I_1 = \int \frac{du}{(u^2+1)} = \operatorname{Arctg}(u) + C$$

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}(u) + \frac{u}{2(u^2+1)} + C$$

$$I_3 = \int \frac{du}{(u^2+1)^3} = \frac{3}{8}\operatorname{Arctg}(u) + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{u}{4(u^2+1)^2} + C$$

(Comme il se doit, la Formule 1 est la plus rapide)

Exemples de calculs explicites :

1) reprenons la fraction rationnelle du chapitre 6, i.e. $f(t) := (t^{10}+t^2+1)/(t^9-2t^5+t)$ dont la décomposition en éléments simples est

$$f(t) = t + \frac{1}{t} + \frac{-3}{16(t+1)^2} + \frac{3}{16(t-1)^2} - \frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{4(t^2+1)^2}$$

et ainsi

$$\int f(t)dt = \frac{t^2}{2} + \log|t| + \frac{3}{32}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{2}\log|t^2+1| - \frac{1}{8(t^2+1)} + C$$

2) soit $n$ impair, on a calculé durant le chapitre 6 la décomposition suivante :

$$t^{2n}/(t^n-1) = t^n + 1 + \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{t-1} + \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2t\cos(2\pi h/n) - 2}{t^2 - 2t\cos(2\pi h/n) + 1}\right\}$$

Pour calculer une primitive de chacun des derniers éléments simples on observe que $t^2 - 2\cos(a) + 1 = (t-\cos(a))^2 + \sin^2(a) = \left[(t-\cos(a)/\sin(a))^2 + 1\right]\sin^2(a)$ donc si l'on pose $u := (t-\cos(a))/\sin(a)$ on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2 - 2\cos(a)t + 1} &= \frac{1}{\sin(a)}\int \frac{du}{u^2+1}\\ &= \frac{1}{\sin(a)}\operatorname{Arctg}(u) + C\\ &= \frac{1}{\sin(a)}\operatorname{Arctg}\left((t-\cos(a))/\sin(a)\right) + C\end{aligned}$$

et donc par linéarité on en tire

$$\begin{aligned}\int \frac{t^{2n}dt}{(t^n-1)} =& \frac{t^{n+1}}{n+1} + t + \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \{\cos(2\pi h/n)\log|t^2 - 2\cos(2\pi h/n)t + 1|\\ &- 2\sin(2\pi h/n)\operatorname{Arctg}\left(\frac{t-\cos(2\pi h/n)}{\sin(2\pi h/n)}\right)\} + C.\end{aligned}$$

Un grand nombre de calculs de primitives se ramène, grâce à un changement de variables adéquat, au calcul d'une primitive de fraction rationnelle. Nous citons ici quelques applications.

i) Si $f$ est une fraction rationnelle en posant le changement de variables $u = e^x$ on obtient la formule $\int f(e^x)dx = \int \frac{f(u)du}{u}$ et l'on sait donc calculer une primitive des fractions rationnelles en $e^x$.

ii) Soit $f$ une fraction rationnelle en deux indéterminées et cherchons une primitive de $f(\cos(x), \sin(x))$ ; pour cela on effectue le changement de variables $t := \operatorname{tg}(x/2)$ ou encore $x = 2\operatorname{Arctg}(t)$ et $dx = 2dt/(1+t^2)$ en utilisant $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$ et $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$ on en déduit :

$$\int f(\cos(x), \sin(x))dx = \int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{dt}{t^2+1}$$

donc on saura calculer une primitive.

Par exemple retrouvons par ce principe une primitive de $1/\sin(x)$ et $1/\cos(x)$. On peut écrire

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\operatorname{tg}(x/2)| + C$$

et en faisant le changement $x := \frac{\pi}{2} - u$.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = -\int \frac{du}{\sin(u)} = -\log|\operatorname{tg}(u/2)| + C = -\log|\operatorname{tg}(\pi/4 - x/2)| + C$$

iii) un autre exemple intéressant est celui des intégrales (dites *abéliennes*) suivantes : il s'agit des primitives de $f(x, \sqrt[m]{(ax+b)/(cx+d)})$ où $f$ est de nouveau une fraction rationnelle en deux indéterminées. On supposera $ad - bc \neq 0$ (sinon le calcul est déjà fait) et on posera

$$u := \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow u^m = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{du^m - b}{-cu^m + a} \quad \text{donc } dx = (ad - bc)\frac{mu^{m-1}du}{(-cu^m + a)^2}$$

d'où la formule de changement de variables :

$$\int f(x, \sqrt[m]{(ax+b)/(cx+d)})dx = (ad - bc)\int f\left(\frac{du^m - b}{-cu^m + a}, u\right)\frac{mu^{m-1}du}{(-cu^m + a)^2}$$

Prenons un exemple concret : le changement $u := \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ donne

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx = 6\int \frac{u^3du}{(u^3 - 1)^2}$$

(il resterait bien sûr à calculer une primitive de $u^3/(u^3 - 1)^2$ en la décomposant en éléments simples).

iv) considérons les intégrales du type $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. On factorise le polynôme du second degré en posant $\Delta = b^2 - 4ac = \varepsilon\delta^2$ (où $\varepsilon = \pm 1$) et alors

$$ax^2 + bx + c = \frac{a\delta^2}{4a^2}\left[\left(\frac{2ax}{\delta} - \frac{b}{\delta}\right)^2 - \varepsilon\right]$$

on effectue naturellement le changement de variable $u := \frac{2ax}{\delta} - \frac{b}{\delta}$ et, si $\eta$ désigne le signe de $a$ on obtient une intégrale du type $\int g(u, \sqrt{\eta u^2 - \eta\varepsilon})du$ où $g$ est une fraction rationnelle. On distingue alors les cas suivants :

CAS $\eta = \varepsilon = 1$ : on pose $u = \operatorname{ch}(t)$ (avec disons $t > 0$) donc $\sqrt{u^2 - 1} = \operatorname{sh}(t)$ et $\int g(u, \sqrt{u^2 - 1})du$ devient $\int g(\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))\operatorname{sh}(t)dt$ que l'on sait intégrer.

CAS $\eta = 1, \varepsilon = -1$ : on pose $u = \operatorname{sh}(t)$ et donc on a $\sqrt{u^2 + 1} = \operatorname{ch}(t)$ et l'intégrale $\int g(u, \sqrt{u^2 + 1})du$ devient $\int g(\operatorname{sh}(t), \operatorname{ch}(t))\operatorname{ch}(t)dt$ que l'on sait intégrer.

CAS $\eta = -1, \varepsilon = 1$ : on pose $u := \sin(t)$ (sur un intervalle convenable) donc $\sqrt{1 - u^2} = |\cos(t)|$ et $\int g(u, \sqrt{1 - u^2})du$ devient $\int g(\sin(t), |\cos(t)|)\cos(t)dt$ que l'on sait intégrer (le cas $\eta = \varepsilon = -1$ est, bien sûr, exclus).

## CHAPITRE 18 INTÉGRALES IMPROPRES

*Nous avons vu que l'intégrale d'une fonction continue par morceau sur un intervalle fermé $[a,b]$ est toujours définie. Une intégrale "indéfinie" ou "posant problème" est une intégrale soit d'une fonction non continue sur un intervalle $[a,b]$ (par exemple $\int_{-1}^{1} dx/x$) ou d'une fonction continue sur un intervalle non borné comme $[a,+\infty)$ (par exemple $\int_1^{+\infty} dx/x$). Ces intégrales n'existent pas toujours et on étudie dans ce chapitre des conditions de convergence et même dans certains cas des méthodes de calcul. Il faut remarquer que de nombreuses intégrales de ce type surgissent naturellement dans les sciences : les calculs de potentiel créé par une masse conduisent à de tels intégrales ; on peut signaler une formule importante (entre autres) en probabilité et statistique :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

*Rappelons que l'on ne peut pas exprimer par des fonctions élémentaires une primitive de la fonction $e^{-x^2}$.*

### 18.1 INTÉGRALES IMPROPRES

**Définition:** Soit $f$ une fonction continue $[a,b[\to \mathbf{R}$ ; si $\lim_{c\to b}\int_a^c f(t)dt$ existe, alors on appelle cette limite l'*intégrale impropre* de $f$ entre $a$ et $b$ et on écrit :

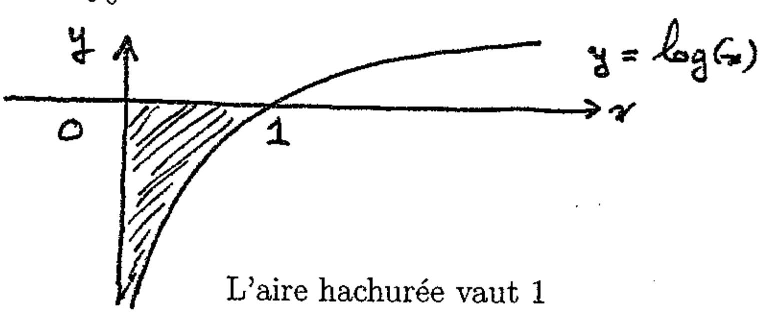
$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}} \int_a^c f(t)dt$$

Convention : on devrait normalement se garder d'écrire $\int_a^b f(t)dt$ avant de savoir que cette limite existe ; il est néanmoins d'usage d'écrire "l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente" si cette limite n'existe pas.

Donnons quelques exemples :

1) Soit $f(t) = \log(t)$ alors $\int_x^1 \log(t)dt = [t\log(t) - t]_x^1 = x - x\log(x) - 1$ donc

$$\int_0^1 \log(t)dt = \lim_{x\to 0}(x - x\log(x) - 1) = -1$$




L'aire hachurée vaut 1

2) Soit $f(t) = t^a$ alors $\int_1^c t^a dt = [t^{a+1}/(a+1)]_1^c = c^{a+1}/(a+1) - 1/a+1$ (resp. $[\log(t)]_1^c = \log(c)$) si $a \neq -1$ (resp. si $a = -1$). La limite lorsque $c$ tend vers $+\infty$ existe

seulement quand $a < -1$, la limite quand $c$ tend vers zéro existe seulement quand $a > -1$ et on obtient

$$\int_1^{+\infty} t^{-a} dt = \begin{cases} \frac{1}{a-1} & \text{si } a > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } a \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 t^{-a} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Par exemple $\int_0^1 dt/\sqrt{t} = 2$ et $\int_1^{+\infty} dt/t^2\sqrt{t} = 2/3$.

Remarque : Si une intégrale est impropre en plusieurs points, on dira qu'elle est convergente si elle convergente au voisinage de chaque point. Par exemple l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt/\sqrt{|t|}$ est définie comme :

$$\lim_{Y\to-\infty} \int_Y^{-1} f(t)dt + \lim_{d\to 0^-} \int_{-1}^{d} f(t)dt + \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 f(t)dt + \lim_{X\to+\infty} \int_1^X f(t)dt$$

ou $f(t) := e^{-|t|}dt/\sqrt{|t|}$. En termes concrets : pour étudier une intégrale impropre on “découpe les difficultés”.

Pour démontrer le théorème on utilisera le critère assez intuitif suivant (dit *critère de Cauchy*) : soit $F : [a, b[\to \mathbf{R}$ telle que $F(c) - F(c')$ tende vers zéro lorsque $a \leq c \leq c' < b$ et $c$ tend vers $b$, alors $F(x)$ tend vers une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$.

**THÉORÈME:** *Si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$, impropre en $b$, est convergente alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est également convergente et l'on a $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.*

**Démonstration:** D'après le critère évoqué précédemment (appliqué à $F(x) = \int_a^x f(t)dt$) l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_c^{c'} f(t)dt$ tend vers 0 lorsque $a \leq c \leq c' \leq b$ et $c$ tend vers $b$. Le théorème découle alors de l'inégalité $|\int_c^{c'} f(t)dt| \leq \int_c^{c'} |f(t)|dt$. □

La réciproque est fausse ; par exemple nous verrons que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente alors que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ est divergente.

**THÉORÈME:** *Supposons que $|f(t)| \leq g(t)$ alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraîne la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ ; la divergence de $\int_a^b f(t)dt$ entraîne la divergence $\int_a^b g(t)dt$.*

**Démonstration:** D'après le théorème précédent, il suffit de voir que $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente. Or la fonction $F(x) := \int_a^x |f(t)|dt$ est croissante et bornée par $\int_a^b g(t)dt$ donc converge vers une valeur finie lorsque $x$ tend vers $b$. □

**THÉORÈME:** *Soient $f(x), g(x)$ deux fonctions positives équivalentes quand $x$ tend vers $b$ alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente.*

**Démonstration:** Comme les fonctions sont équivalentes, on a sur un voisinage de $b$ des inégalités de la forme : $Cf(x) \leq g(x) \leq C'f(x)$ ; en appliquant le théorème précédent on en déduit que la convergence d'une des deux intégrales entraîne la convergence de l'autre. □

Exemples de calculs (les détails sont laissés en exercice) :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

## 18.2 CALCULS D'INTÉGRALES IMPROPRES

*Les techniques de calcul que nous abordons peuvent se résumer ainsi : on applique les techniques de calcul des intégrales finies (linéarité, intégration par parties, changement de variable) et on passe à la limite. Ce paragraphe est donc un paragraphe d'exercices et exemples, on détermine notamment quand $\int_0^{+\infty} (a_1 t^{s_1} + \ldots + a_r t^{s_r})\, e^{-t} dt/t$ est convergente.*

**PROPOSITION:** *(Linéarité) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $f, g : [a, b[ \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues dont les intégrales sur $[a, b]$ convergent, alors l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ converge et :*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

**Démonstration:** On utilise la linéarité de l'intégrale usuelle et on passe à la limite. □

Exemple : Posons $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s dt/t$, les critères du paragraphe précédent permettent d'établir que l'intégrale converge si et seulement si $s > 0$. Si donc $s_1, \ldots, s_r > 0$ alors

$$\int_0^{+\infty} (a_1 t^{s_1} + \ldots + a_r t^{s_r})\, e^{-t} dt/t = a_1 \Gamma(s_1) + \ldots + a_r \Gamma(s_r).$$

**PROPOSITION:** *(Intégration par parties) Soient $f, g : [a, b[ \to \mathbf{R}$ continûment dérivables alors :*

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = \lim_{c \to b} f(c) g(c) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

*où la convergence de deux termes entraîne la convergence du troisième.*

**Démonstration:** On utilise l'intégration par parties de l'intégrale usuelle et on passe à la limite. □

Exemple :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \lim_{c \to +\infty} e^{-c} \frac{c'^s}{s} - \lim_{c' \to 0} e^{-c'} \frac{c'^s}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s dt = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

En calculant $\Gamma(1) = 1$, on en tire $\Gamma(m) = (m-1)!$ pour $m \in \mathbf{N}^*$.

**PROPOSITION:** *(Changement de variable) Soit $f : [c, d[\to \mathbf{R}$ continue dont l'intégrale sur $[c, d]$ converge, soit $g : [a, b[\to [c, d[$ une bijection continûment dérivable alors :*

$$\int_a^b f \circ g(t) g'(t) dt = \int_c^d f(u) du$$

**Démonstration:** On utilise le changement de variable de l'intégrale usuelle et on passe à la limite. □

Exemple : 1) Soit $I(b) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/b} dt$. Faisons le changement de variable $\sqrt{b}u := x - a$, on obtient $I(b) = \sqrt{b} I(1)$. Si l'on sait que $I(1) = \sqrt{\pi}$ on obtient la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/b} dx = \sqrt{\pi b}$$

2) On peut aussi en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ (et donc de $\Gamma(n + 1/2)$ ) ; on effectue cette fois le changement de variable $u = \sqrt{t}$ :

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Terminons ce chapitre par l'étude d'une intégrale "semi-convergente" :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ est divergente mais $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente (sa valeur est en fait $\pi/2$ mais nous ne prouverons pas cela).

**Démonstration:** Lorsque $x$ tend vers 0 alors $\sin(x)/x$ tend vers 1 donc l'intégrale n'est qu'apparemment impropre en 0. Utilisons les inégalités suivantes :

$$\int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{(N+1)\pi} dx = \frac{1}{(N+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{(N+1)\pi}$$

donc $\int_0^{(M+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{N=0}^{M} \frac{1}{N+1}$, or cette dernière somme tend vers l'infini donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ est divergente.

Pour prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$, on peut utiliser une intégration par parties :

$$\int_1^X \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{-\cos(X)}{X} + \cos(1) - \int_1^X \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ est convergente car $|\frac{\cos(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ est convergente. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente. □

Remarque : Pour calculer une valeur approchée d'une intégrale impropre comme la précédente on procède en deux temps. On majore $\int_X^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$, ce qui peut se faire ainsi :

$$\int_X^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\cos(X)}{X} - \int_X^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

La dernière intégrale est majorée,en valeur absolue, par $\int_X^{+\infty} dx/x^2 = 1/X$ donc on a $|\int_X^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx| \leq 2/X$. Ensuite on calcule une valeur approchée $I$ de $\int_0^X \frac{\sin(x)}{x} dx$ à $\varepsilon$ près, par exemple par la méthode des trapèzes et on conclut que $|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - I| \leq \varepsilon + 2/X$.

Abel Niels (1802–1829)

# CHAPITRE 19 COURBES PARAMÉTRÉES ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

*L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement local (i.e. au voisinage d'un point) des courbes. Le premier paragraphe est consacré à des techniques de calculs de limites ou d'équivalents. Par exemple les deux limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sqrt{1+x}+1}{x^2}$$

*ne sont pas accessibles avec les méthodes développées avant ce chapitre ; le calcul des développements limités permet d'y remédier. La deuxième partie est consacrée à l'étude des courbes proprement dites ; plus précisément on étudie des courbes un peu plus générales que les graphes de fonctions et qui interviennent souvent par exemple en cinématique ou en mécanique (où les coordonnées d'un mobile sont connues en fonction du temps). L'exemple le plus basique en physique est le mouvement d'un solide soumis à la gravitation : avec les notations usuelles en physique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ donc $-mg = my''$ et $0 = mx''$ d'où $y(t) = -gt^2/2 + y'(0)t + y(0)$ et $x(t) = x'(0)t + x(0)$, ce qui détermine une parabole.*

## 19.1 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

**Notation** : on désignera dans tout ce chapitre par $\varepsilon(x)$ une fonction définie au voisinage de 0 et tendant vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

**Définition:** Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ admet un *développement limité* (DL) à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0 \in I$ si il existe une fonction polynôme $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ tel que

$$f(x) = P(x) + (x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$$

Exemple : une fonction admet un DL en un point $x_0$ d'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en ce point.

Remarque sur les notations : nous nous contenterons de la notation $\varepsilon(x)$ qui désignera dans tout ce chapitre une fonction tendant vers zéro quand $x$ tend vers zéro (qui ne sera pas toujours la même!). Plusieurs auteurs utilisent (au moins) deux autres notations que nous signalons donc : la notation $O(x^n)$ ("grand $O$") désigne une fonction bornée en valeur absolue par $C|x|^n$ lorsque $x$ tend vers zéro ; la notation $o(x^n)$ ("petit o") désigne une fonction dont le quotient par $x^n$ tend vers zéro quand $x$ tend vers zéro.

**PROPOSITION:** *Un développement limité d'ordre $n$, si il existe, est unique.*

**Démonstration:** Supposons que $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) = Q(x) + x^n\eta(x)$ où $P, Q$ sont des polynômes de degré $\leq n$ et $\varepsilon$, $\eta$ tendent vers zéro quand $x$ tend vers zéro. Alors, si le polynôme $P-Q$ n'était pas nul, la fonction $(P-Q)(x)$ serait équivalente à une fonction $ax^r$ avec $a \neq 0$ et $0 \leq r \leq n$ et ne pourrait être égale à une fonction du type $\varepsilon(x)x^n$ car $\lim \frac{\varepsilon(x)x^n}{ax^r} = 0$. $\square$

Remarque : l'unicité permet de simplifier certains calculs car elle entraîne qu'une fonction paire (resp. impaire) n'aura que des termes de degré pair du type $x^{2m}$ (resp. impair du type $x^{2m+1}$) dans un développement limité.

La méthode la plus courante pour montrer l'existence des DL est d'utiliser la formule de Taylor qui entraîne que :

**THÉORÈME:** (Formule de Taylor-Young)*Soit $f$ une fonction $n$ fois continument dérivable sur un intervalle $I$ contenant $x_0$, alors*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$$

**Démonstration:** Quitte à faire une translation, on peut supposer que $x_0 = 0$. La formule de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

avec $c$ compris entre 0 et $x$. Ainsi lorsque $x$ tend vers zéro, $c$ tend aussi vers zéro et comme $f^{(n)}$ est continue $f^{(n)}(c) - f^{(n)}(0)$ tend vers zéro quand $x$ tend vers zéro donc $f^{(n)}(c)x^n = f^{(n)}(0)x^n + \varepsilon(x)x^n$ ; en reportant dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient le résultat escompté. □

Par application directe on trouve :

**COROLLAIRE:** *Les fonctions $e^x$, $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $(1+x)^a$ admettent les DL suivants :*

$$\begin{aligned}
e^x =& 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\cos(x) =& 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \\
\sin(x) =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
(1+x)^a =& 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exemple d'utilisation : $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)} = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 2\sqrt{1+x}+1}{x^2} = \frac{3}{4}$.

En effet $\cos(x)-1 = -x^2/2+x^2\varepsilon(x)$ et $x\sin(x) = x^2+x^2\varepsilon(x)$ donc $\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)} = -\frac{1}{2}+\varepsilon(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$. Par ailleurs $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^2\varepsilon(x)$ donc $e^x - 2\sqrt{1+x}+1 = (1+x+x^2/2) - 2(1+x/2-x^2/8) + 1 + x^2\varepsilon(x) = \frac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ d'où la deuxième limite.

**THÉORÈME:** *Soient $f, g$ deux fonctions continues de variables réelles dont on suppose qu'elles admettent un DL à l'ordre $n$ de la forme : $f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\varepsilon(x)x^n = P(x)+\varepsilon(x)x^n$ et $g(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\varepsilon(x)x^n = Q(x)+\varepsilon(x)x^n$*

*(i) (Somme) La fonction $f+g$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 qui s'écrit :*

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_n+b_n)x^n + \varepsilon(x)x^n$$

*(ii) (Produit) La fonction $fg$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 qui s'écrit :* $(fg)(x) = c_0 + \ldots + c_n x^n + \varepsilon(x)x^n$ *avec* $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$

*(iii) (Quotient) Supposons $b_0 \neq 0$ (c'est-à-dire $g(0) \neq 0$) alors la fonction $f/g$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 qui s'écrit :* $(f/g)(x) = c_0 + \ldots + c_n x^n + \varepsilon(x)x^n$ *avec des $c_i$ que l'on peut déterminer par la relation* $a_i = \sum_{k=0}^{i} c_k b_{i-k}$.

*(iv) (Composée) Supposons $b_0 = 0$ alors la fonction $f \circ g$ admet un DL à l'ordre $n$ en 0 qui s'écrit :* $(f \circ g)(x) = R(x) + \varepsilon(x)x^n$ *où $R(x)$ est le polynôme $P \circ Q(x)$ auquel on a retiré les termes de degré $> n$.*

*(v) (Intégration) Soit $F(x)$ une primitive de $f$ alors elle admet un DL d'ordre $n+1$ qui s'écrit* $F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 x^2/2 + \ldots + a_n x^{n+1}/(n+1) + \varepsilon(x)x^{n+1}$.

**Démonstration:** Les deux premiers énoncés s'obtiennent immédiatement en additionnant ou multipliant les DL de $f$ et $g$. Les points (iii) et (iv) sont également un simple calcul si l'on admet l'existence d'un DL, qui est un peu plus délicate à prouver et que nous admettrons. Enfin le dernier point s'obtient par intégration du DL de $f(x)$ ; en effet $\int_0^x t^m dt = x^{m+1}/(m+1)$ et, si l'on note $\eta(x) = sup_{t\in[0,x]}|\varepsilon(t)|$, on a :

$$\left|\int_0^x \varepsilon(t)t^n dt\right| \leq \eta(x)\int_0^x t^n dt = \eta(x)\frac{x^{m+1}}{(m+1)}$$

d'où le résultat. □

**APPLICATION:** Par application directe on obtient les DL suivants :

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
\mathrm{Arctg}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \varepsilon(x)x^{2n+1} \\
\mathrm{Argsh}(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n C_{2n}^n\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)} + \varepsilon(x)x^{2n+1} \\
\mathrm{tg}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \varepsilon(x)x^6
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor on a calculé le DL de $(1+x)^{-1}$ et de $(1+x)^{-1/2}$ Le premier s'obtient en intégrant le DL de $1/(1+x)$ ; en utilisant le DL d'une fonction composée on obtient le DL de $1/(1+x^2)$ et $(1+x^2)^{-1/2}$ et en intégrant on obtient le DL de $\mathrm{Arctg}(x)$ et $\mathrm{Argsh}(x)$. En utilisant la formule de Taylor et le fait que la fonction tangente est impaire, on sait que $\mathrm{tg}(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \varepsilon(x)x^6$ ; on peut déterminer les coefficients $c_i$ soit en calculant les dérivées successives de tg soit en utilisant les DL de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et la règle pour le quotient de deux DL.

## 19.2 COURBES PARAMÉTRÉES

**Définition:** On appelle *courbe paramétrée* une application de $I$ dans $\mathbf{R}^2$ où $I$ est un intervalle ou une union d'intervalles.

Notation : on écrira en général $M(t) = (x(t), y(t))$ le point du plan donné par la valeur $t$ du paramètre.

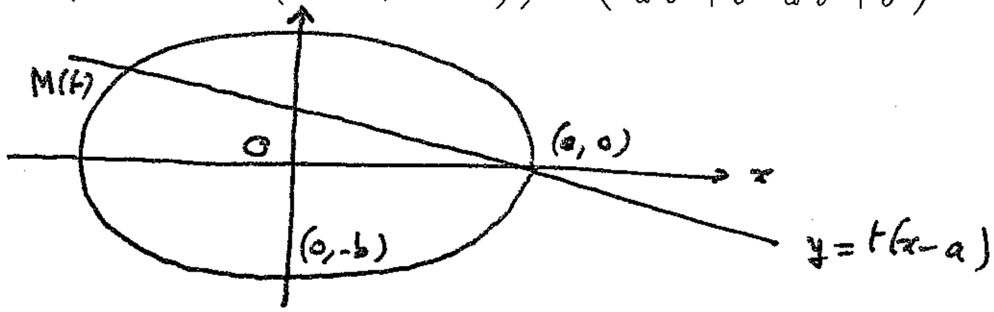
Remarque : d'après la définition il faudrait distinguer l'ensemble $C = \{(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in I\}$ – qui correspond à l'appellation usuelle de courbe– et la courbe paramétrée elle-même qui est l'application $t \mapsto (x(t), y(t))$ ; mais, conformément à l'usage, on dira aussi que la courbe $C$ est paramétrée par l'application. En particulier une courbe (au sens usuel) peut être paramétrée de diverses façons. De nombreux problèmes conduisent à des courbes paramétrées, commençons par donner des exemples de paramétrisations de courbes simples.

Exemples :

1) La courbe paramétrée définie par $x(t) = at + b$ et $y(t) = ct + d$ est une droite dont la pente est $c/a$.

2) L'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ peut être paramétrée de plusieurs façons : d'abord à l'aide de fonctions circulaires : $M(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ mais aussi à l'aide de fractions rationnelles : si l'on coupe l'ellipse par la droite de pente $t$ passant par le point $(a, 0)$ on obtient (après un petit calcul) un point

$$M(t) = \left(a\frac{a^2t^2 - b^2}{a^2t^2 + b^2}, t\left(a\frac{a^2t^2 - b^2}{a^2t^2 + b^2} - a\right)\right) = \left(a\frac{a^2t^2 - b^2}{a^2t^2 + b^2}, \frac{-2ab^2t}{a^2t^2 + b^2}\right)$$




Ceci fournit une paramétrisation de l'ellipse moins le point $(a, 0)$ qui n'est pas atteint.

Remarque : ces deux paramétrisations peuvent bien sûr être reliées. Explicitons cela dans le cas du cercle avec $a = b = 1$. Le point $\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right)$ correspond à $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ lorsque $t = -\operatorname{tg}(\theta/2)$.

Nous nous concentrons maintenant sur l'étude et le tracé des courbes paramétrées. Déterminons, dans certains cas, la pente de la tangente d'une courbe paramétrée :

**THÉORÈME:** *Soit $t \mapsto (f(t), g(t))$ une courbe paramétrée par un intervalle $I$ (avec $t_0 \in I$) ; supposons les deux fonctions $f$ et $g$ continûment dérivables en $t_0$ et telle que $f'(t_0) \neq 0$ alors la pente de la tangente, au point $M(t_0) = (f(t_0), g(t_0))$ de la courbe paramétrée, est donnée par*

$$p = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

**Démonstration:** Pour fixer les idées, disons que $f'(t_0) > 0$ alors $f'(t)$, étant continue, reste strictement positive sur un (petit) intervalle $]a, b[$ contenant $t_0$ et donc $f$ détermine une bijection de $]a, b[$ sur un autre intervalle ; notons $h := f^{-1}$ la bijection réciproque, on sait que si $t = h(x)$ alors $h'(x) = 1/f'(t)$, de plus on aura alors $y = g \circ h(x)$ et $dy/dx = g'(h(x))h'(x) = g'(t)/f'(t)$. $\square$

Remarques :

i) Mnémotechniquement on pourra utiliser : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}$.

ii) Si $f'(t_0) = 0$ mais $g'(t_0) \neq 0$ alors, en intervertissant les rôles des coordonnés on voit que la pente est verticale. Ceci nous laisse à traiter le cas où $f'(t_0) = g'(t_0) = 0$.

**Définition:** Le point $t_0 \in I$ (ou $I$ est un intervalle) est dit *singulier* pour la courbe paramétrée $M : I \to \mathbf{R}^2$ donnée par $t \mapsto (f(t), g(t))$ si $f'(t_0) = g'(t_0) = 0$.

Pour étudier un point singulier, nous allons utiliser les DL des fonctions $f, g$ au voisinage de $t_0$ (quand ils existent).

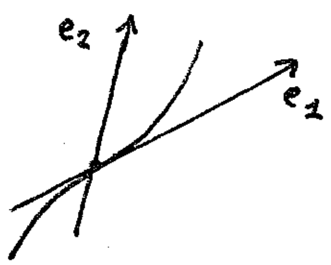
Notation : si $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots a_n t^n + \varepsilon(t)t^n$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots b_n t^n + \varepsilon(t)t^n$, notons $M(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ et $e_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$, nous écrirons :

$$M(t) = e_0 + te_1 + \dots + t^n e_n + t^n \varepsilon(t)$$

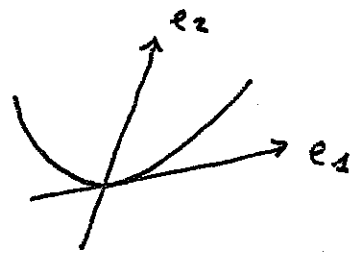
où $\varepsilon(t)$ désignera un vecteur dont les coordonnées tendent vers 0 quand $t$ tend vers 0. On introduit aussi la notation $M'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ et plus généralement $M^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} f^{(n)}(t) \\ g^{(n)}(t) \end{pmatrix}$. On obtient alors, sous l'hypothèse que $f$ et $g$ sont suffisamment dérivable une formule de Taylor-Young vectorielle :

$$M(t) = M(t_0) + \frac{(t-t_0)}{1!}M'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}M''(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}M^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t-t_0)$$

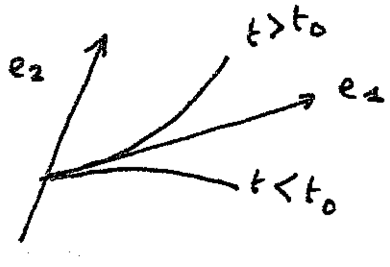
**THÉORÈME:** *Soient $m < n$ les plus petits entiers tels que les vecteurs $M^{(m)}(t_0)$ et $M^{(n)}(t_0)$ soient linéairement indépendants, notons $e_1 = M^{(m)}(t_0)$ et $e_2 = M^{(n)}(t_0)$ et supposons que* $\det(e_1, e_2) > 0$, *alors l'allure de la courbe paramétrée au voisinage de $M(t_0)$ est la suivante :*



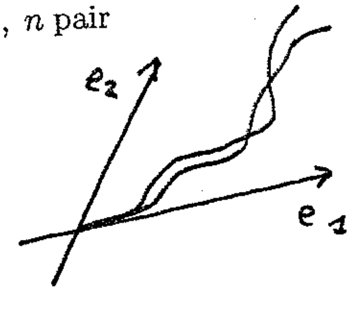

$m$, $n$ impairs




$m$ impair, $n$ pair



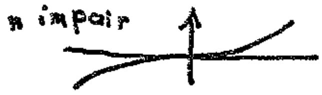

$m$ pair $n$ impair




$m$ pair, $n$ pair

*Si* $\det(e_1, e_2) < 0$, *il faut opérer une symétrie (par rapport à la droite engendrée par* $e_1$*) pour obtenir l'allure de la courbe au voisinage de* $M(t_0)$.

**Démonstration:** (esquisse) Après éventuellement une symétrie et à un changement de repère près (qui ne modifie pas l'allure du graphe) on peut se ramener à étudier les courbes $M(t) := (t^m, t^n)$ ce qui est relativement aisé : si $m$ est impair on aura $t = x^{1/m}$ et la courbe est le graphe de la fonction $f(x) = \left(x^{1/m}\right)^n$, c'est-à-dire :



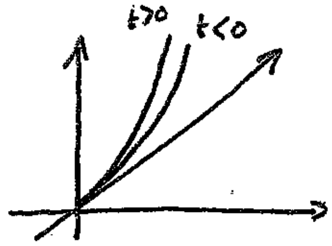


Si $m$ est pair alors $x \geq 0$ et, pour $t \geq 0$ on a $t = x^{1/m}$ et $y = \left(x^{1/m}\right)^n$ alors que pour $t \leq 0$, on a $y = (-1)^n \left(x^{1/m}\right)^n$ c'est-à-dire :



□

Comme illustration, incluons l'exemple suivant dont les détails sont laissés en exercice. On veut étudier le comportement au voisinage de $t = 0$ de la courbe $M(t) = (x(t), y(t)) = (t^2 + t^4, t^2 + t^5)$. On a $M'(0) = M'''(0) = 0$ et $M''(0) = (2, 2)$ indépendant de $M^{(4)}(0) = (24, 40)$. Pour déterminer la position de la demi-branche "$t > 0$" par rapport à celle "$t < 0$" on observe qu'ici, $x(t) = x(-t)$ et que, pour $t > 0$ on a $y(t) = y(-t) + 10t^5 > y(-t)$ d'où l'esquisse suivante :




Passons maintenant à l'étude pratique d'une courbe paramétrée ; un plan général d'étude possible est le suivant

- Détermination du domaine, des périodes et des symétries éventuelles ;
- Calcul de $x'(t)$ et de $y'(t)$, tableau de variations, asymptotes ;
- Etude des points singuliers, calcul de quelques tangentes ;
- Détermination des points doubles ;
- Représentation graphique.

Plutôt que de faire une étude théorique, illustrons cela sur un exemple :

Etudions la courbe :

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{4}{t-1} \\ t + 1 + \frac{4}{(t-1)^2} \end{pmatrix}$$

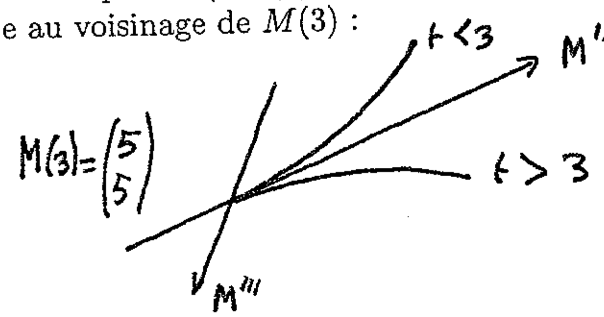
– Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont définies pour $t \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ; il n'y a ni période ni symétrie apparente.

– On calcule $x'(t) = (t-3)(t+1)/(t-1)^2$ et $y'(t) = (t-3)(t^2+3)/(t-1)^3$ donc le point correspondant à $t = 3$ c'est-à-dire $M(3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ est singulier, et le point $M(-1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a une tangente verticale. Les limites de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque $t$ tend vers 1 ou $\pm\infty$ sont faciles à calculer ainsi que les sens de variation ; on résume ceci dans un tableau :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1^-$ | $1^+$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $-\infty$ | | $\nearrow$ | | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | | $+$ | | | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Pour déterminer si la courbe admet une asymptote lorsque $t$ tend vers $1^\pm$ ou vers $\pm\infty$ on calcule le rapport $y(t)/x(t) = t^3 - t^2 - t + 5/(t-1)(t^2-t+4)$. Ce rapport ne tend pas vers une limite finie lorsque $t$ tend vers 1 donc il n'y a pas d'asymptote dans ce cas. Par contre $\lim_{t\to\infty} y(t)/x(t) = 1$ et donc s'il existe une asymptote elle sera de la forme $y = x + b$ ; donc il nous faut maintenant voir si $y(t) - x(t)$ tend vers une limite finie : $y(t) - x(t) = 1 + 4/(t-1)^2 - 4/(t-1)$ tend vers 1 donc la droite $y = x + 1$ est asymptote ; de plus si $t$ tend vers $+\infty$ on a $y(t) - x(t) - 1 < 0$ et si $t$ tend vers $-\infty$ on a $y(t) - x(t) - 1 > 0$ donc dans le premier cas la branche de la courbe est au dessous de l'asymptote et dans le deuxième cas elle est au dessus de l'asymptote.

– On étudie le comportement de la courbe au voisinage du point singulier $M(3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ : on calcule tout d'abord $M'(3) = 0$ (bien sûr) puis $M''(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ et ensuite $M'''(3) = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ces deux derniers vecteurs sont linéairement indépendants et un calcul immédiat montre que $\det(M''(3), M'''(3)) < 0$. Ceci permet donc de déterminer l'allure de la courbe au voisinage de $M(3)$ :




– Il n'y a pas de point double, c'est-à-dire que les équations $x(t) = x(s)$ et $y(t) = y(s)$ entraînent $t = s$. Vérifions cela : $t + 4/(t-1) = s + 4/(s-1)$ équivaut à $(t-s) = 4(t-s)/(s-1)(t-1)$ donc à $t = s$ ou $(s-1)(t-1) = 4$. Par ailleurs $t + 1 + 4/(t -$

$1)^2 = s+1+4/(s-1)^2$ équivaut à $(t-s) = 4(s-t)(s+t-2)/(s-1)^2(t-1)^2$ donc à $t = s$ ou $s+t = 2+(s-1)^2(t-1)^2/4$. Si l'on exclut $t = s$ on aboutit à ce que $(s-1)(t-1) = 4$ et $(t-1)+(s-1) = 4$ ce qui signifie que $s-1$ et $t-1$ sont les racines de $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2 = 0$ ce qui entraîne $s = t = 3$.

– Avant de tracer la courbe, notons que l'on peut préciser un peu le comportement de la courbe quand $t$ tend vers $1^{\pm}$. En effet on observe que

$$y(t) - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = (t-1)(1-(t-1)/4)$$

donc lorsque $t$ tend vers 1, la courbe se rapproche de la parabole d'équation $y = (x-1)^2/4$. On peut même préciser que lorsque $t \to 1^+$ la courbe est *au dessus* de la parabole et lorsque $t \to 1^-$ la courbe est *au dessous* de la parabole. On généralise, sur cet exemple, la notion de courbe asymptote : on se contente souvent de rechercher les droites asymptotes, mais on peut rechercher plus généralement des courbes asymptotes.

– On peut aussi calculer les points d'intersection de la courbe avec l'asymptote $y = x+1$, on trouve $t = 2$ et $M(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ ainsi que les points d'intersection avec la parabole $y - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$, on trouve $t = 5$ et $M(5) = \begin{pmatrix} 6 \\ 25/4 \end{pmatrix}$.

On peut maintenant tracer le graphe de la courbe que l'on vient d'étudier (voir page suivante).

Comme autre exemple on décrit très succintement l'étude de la courbe (il s'agit d'un exemple de courbes dites de Lissajoux).

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}$$

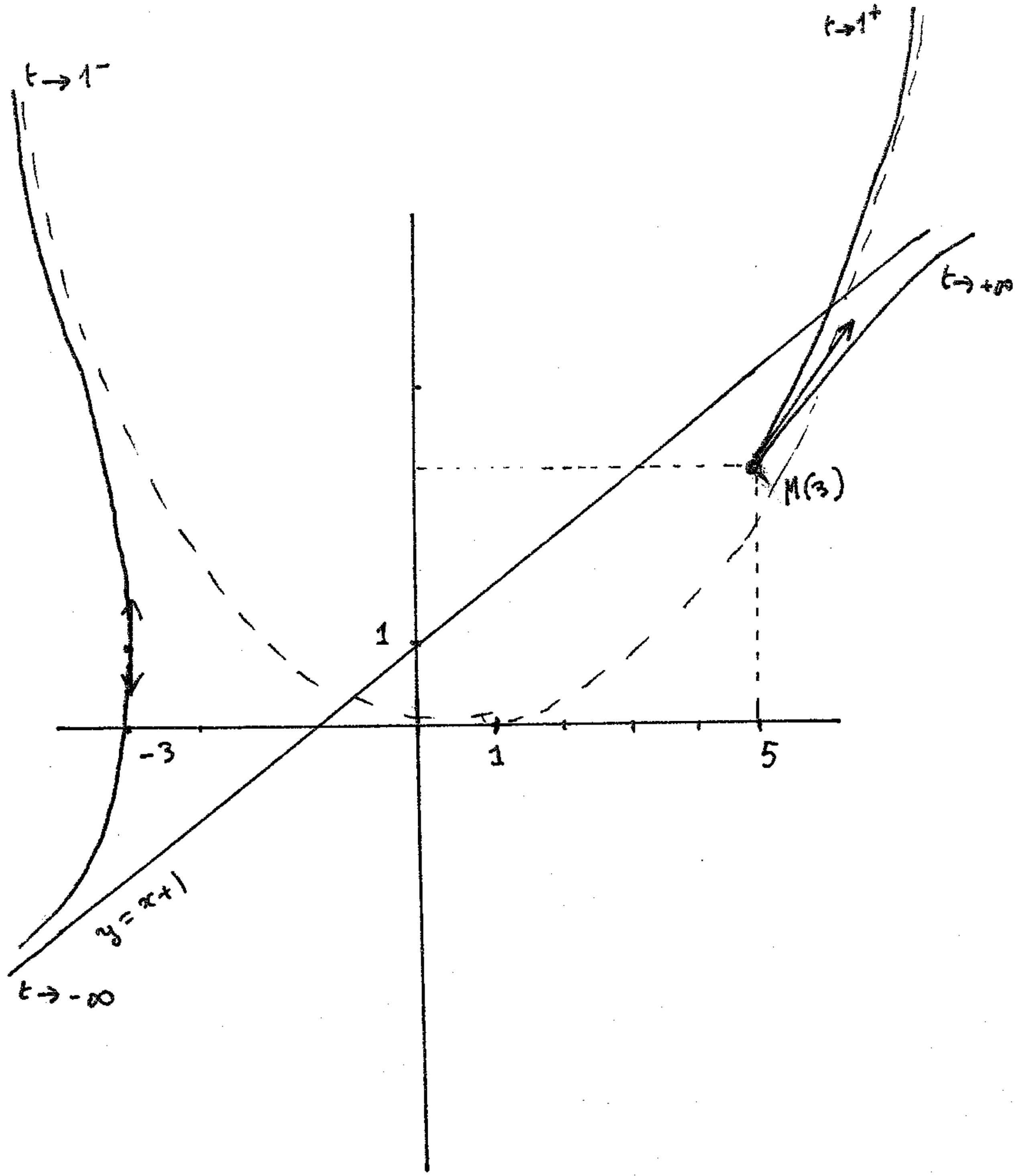
La "caractéristique" de cette courbe est de posséder beaucoup de symétries; mettons en évidence les principales symétries.

– On a bien sûr $M(t+2\pi) = M(t)$ donc la courbe est périodique et il suffit de l'étudier pour $t$ dans un intervalle de longueur $2\pi$.

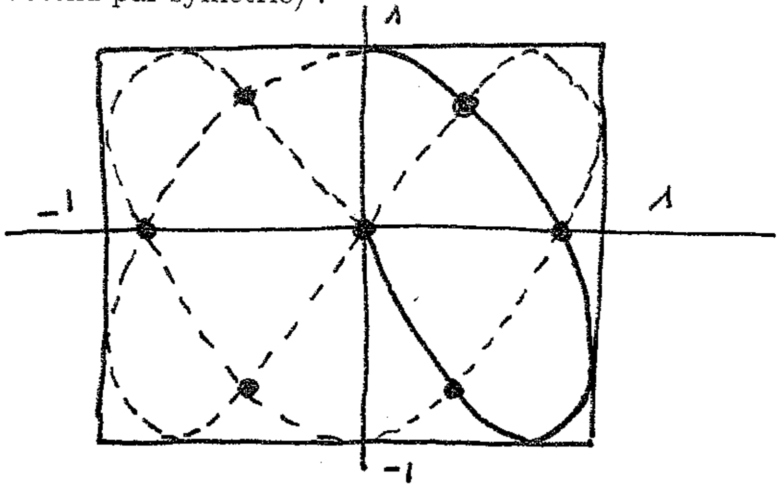
– On remarque aussi que $\begin{pmatrix} x(t+\pi) \\ y(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ donc on peut prendre un intervalle de longueur $\pi$, on obtiendra la courbe complète par symétrie par rapport à l'axe des $x$.

– On a aussi $\begin{pmatrix} x(-t) \\ y(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ donc on peut prendre un intervalle centré en 0 et le réduire de moitié, on obtiendra la courbe complète par symétrie par rapport à l'axe des $y$.

Tracé de la courbe $M(t) = (x(t), y(t)) = \left(t + \frac{4}{t-1}, t + 1 + \frac{4}{(t-1)^2}\right)$ :



– Après avoir fait un tableau de variations (ce qui est laissé en exercice), on peut tracer la courbe (en trait continu la partie correspondant à $t \in [0, \pi/2]$, en pointillé le reste de la courbe obtenu par symétrie) :




Tracé de la courbe $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}$.

Nous laissons en exercice le soin de déterminer les sept points doubles (si l'on restreint le paramètre $t$ à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$).

Remarque : on peut observer cette courbe sur l'écran d'un oscilloscope à condition d'y entrer deux tensions dont les fréquences sont dans un rapport $\frac{3}{2}$ (ou $\frac{2}{3}$).


Gauss Carl Friedrich (1777–1855)