CHAPITRE 7 MATRICES

Ce chapitre introduit un outil de calcul très commode : les matrices. Celles-ci sont définies comme un tableau de nombres mais on en verra une interprétation plus abstraite au chapitre 9. La technique centrale de ce chapitre est celle dite du "pivot de Gauss" qui est à la fois simple, efficace et versatile.

7.1 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Définition: Soient $m, n \geq 1$ des entiers ; une *matrice* $m \times n$ est un tableau de nombres avec m lignes et n colonnes :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les éléments a_{ij} s'appellent les *coefficients* de la matrice A. Par convention, le premier indice est le numéro de la ligne, le deuxième indice est le numéro de la colonne. On désignera par $Mat(m \times n, \mathbf{R})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{R}$.

Remarque : on travaillera pour le moment avec des nombres réels mais il n'y a pas de difficulté à étendre les notions de ce chapitre au cas où les coefficients sont dans un corps commutatif K.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×4 et son coefficient a_{22} est égal à 2, alors que $a_{13} = 3$.

Une matrice $1 \times n$ est un *vecteur ligne.* Une matrice $m \times 1$ est un *vecteur colonne.*

Définissons maintenant les opérations sur les matrices :

<u>Addition</u> :

Si $A := (a_{ij})$ et $B := (b_{ij})$ sont des matrices $m \times n$ alors $A + B$ est une matrice $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Multiplication par un scalaire</u> : Si $A := (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ alors αA est une matrice $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} := \alpha a_{ij}$.

Exemple : $3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & -9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

Enfin l'opération la plus intéressante (et la plus compliquée) :

<u>Multiplication de deux matrices</u> :

Si $A := (a_{ij})$ et $B := (b_{ij})$ sont des matrices $m \times n$ et $n \times p$ alors AB est une matrice $m \times p$ dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque : il faut bien noter que la multiplication de deux matrices n'est définie que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice.

Cas particulier : Le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne (de même longueur) est un nombre :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

(ce produit est en fait le produit scalaire et la dernière égalité signifie que les vecteurs $(3, -1, 4)$ et $(1, -1, -1)$ sont orthogonaux).

Cas général : Le produit d'une matrice s'obtient en faisant le produit de chaque ligne de la première matrice par les colonnes de la seconde :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ . & \ldots & \ldots & . \\ \boxed{a_{i1} \quad \ldots \quad \ldots \quad a_{in}} \\ . & \ldots & \ldots & . \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{matrix}} & \ldots & b_{1p} \\ b_{n1} & \ldots & & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & c_{1p} \\ & \boxed{c_{ij}} & \\ c_{m1} & & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad -3 \quad 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -4 \\ -1 & \boxed{8} & 5 \end{pmatrix}$$

Plus généralement on peut faire le produit de matrices par blocs (de tailles compatibles) :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

où $A, B, \ldots, D'$ sont des matrices, en les manipulant comme des scalaires, mais en faisant attention à ne pas les faire commuter car :

La multiplication des matrices n'est pas commutative, on a en général $AB \neq BA$, ainsi par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut aussi rajouter une opération qui est plutôt une notation : on peut juxtaposer une matrice $m \times n$ et une matrice $m \times r$ pour obtenir une matrice $m \times (n + r)$. Si A et B sont les deux matrices initiales, on note la nouvelle matrice $(A|B)$

Les matrices permettent de compacter des formules et donc de les manipuler de façon plus efficace ; nous allons appliquer cela au problème de la résolution d'un *système linéaire*, c'est-à-dire d'un système d'équation du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On peut réécrire un tel système en termes de matrices en posant

$$A := (a_{ij}), \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors le système équivaut à :

$$AX = b$$

Avant de manipuler plus avant les matrices, il convient de connaître les règles de calcul :

PROPOSITION: *Les opérations sur les matrices vérifient les règles suivantes :*
1) (distributivité) $A(B+C) = AB + AC$ *et* $(A+B)C = AC + BC$
2) (associativité) $(AB)C = A(BC)$
3) (compatibilité) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Démonstration: La vérification ne présente pas de difficulté. □

On peut aussi introduire des matrices particulières :

La *matrice nulle* $m \times n$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls ; on la note 0_{mn} ou simplement 0 si le contexte rend clair sa taille. Observons que pour toute matrice A (de taille $n \times p$) on a $0_{mn}A = 0_{mp}$.

La *matrice identité* $m \times m$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale qui valent 1 ; on la note I_m ou simplement I si le contexte rend clair sa taille. Ainsi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(où les coefficients laissés en blanc sont nuls). Observons que pour toute matrice A de taille $m \times n$ on a $I_mA = A = AI_n$.

Une *matrice diagonale* $m \times m$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale ; ainsi

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

(où les coefficients laissés en blanc sont nuls).

Une *matrice triangulaire supérieure* $m \times m$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur la diagonale et au dessus de la diagonale ; ainsi

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ & a_{22} & * & * & * \\ & & . & * & * \\ & & & . & * \\ 0 & & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

(où les coefficients laissés en blanc sont nuls et les étoiles désignent des coefficients quelconques).

COROLLAIRE: *L'ensemble des matrices carrées $Mat(n \times n, \mathbf{R})$, muni de l'addition et de la multiplication est un anneau ; si $n = 1$ c'est un corps "égal" à $\mathbf{R}$, si $n \geq 2$ c'est un anneau non commutatif qui n'est pas un corps.*

Démonstration: Les propriétés d'anneau sont contenues dans les propriétés générales des matrices, l'élément neutre de la loi d'addition étant 0_{nn} et l'élément neutre de la multiplication étant I_n. On a déjà vu que l'anneau n'est pas commutatif si $n = 2$ et de même ce n'est pas un corps car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{22}$ est nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul. □

Il est donc intéressant de rechercher si une matrice a un inverse (à gauche ou à droite si elle n'est pas carrée). Faisons le explicitement sur les matrices 2×2 : observons que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$

On voit donc que si $ad - bc \neq 0$ alors la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

D'autre part si on a $ad - bc = 0$ la matrice A n'est pas inversible car sinon on obtiendrait $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0.I_2 = 0_{22}$ et donc $A = 0_{22}$ ce qui serait contradictoire.

Un intérêt clair du calcul de l'inverse d'une matrice (quand il existe) est la résolution des systèmes linéaires associés : en effet si A est inversible alors $AX = b$ équivaut à $X = A^{-1}b$. Il est néanmoins rare que l'on ait recours a cette méthode : tout d'abord elle ne s'adapte qu'à des cas particuliers et ensuite il existe une méthode permettant de traiter tous les cas et qui de plus est beaucoup plus pratique et performante du point de vue algorithmique (et qui fournit l'inverse quand il existe).

7.2 LA MÉTHODE DU PIVOT

On décrit une procédure de résolution des systèmes linéaires : l'idée est de se ramener à un système triangulaire que l'on peut ensuite résoudre simplement.

Définition: Une *opération élémentaire* sur les lignes d'une matrice consiste à :

- Remplacer une ligne L_i par la ligne $L_i + L_j$ (avec $i \neq j$).
- Echanger deux lignes.
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul.

Remarque : en combinant ces opérations, on voit qu'on peut remplacer L_i par $L_i + \alpha L_j$.

Montrons sur un exemple que ces opérations permettent de simplifier considérablement une matrice ; indiquons par une flèche le fait de passer à une autre matrice (par une opération élémentaire).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -17/4 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -17/4 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Le grand intérêt, du point de vue de la résolution des systèmes linéaires, est le suivant :

THÉORÈME: *Considérons le système linéaire*

$$(*) \quad AX = b$$

Supposons que l'on passe de la matrice $A_1 := (\,A \mid b\,)$ à la matrice $A_2 := (\,A' \mid b'\,)$ par une succession d'opérations élémentaires, alors les solutions du système linéaire :

$$(**) \quad A'X = b'$$

sont les mêmes que celles du système (*).

Démonstration: Echanger l'ordre de deux équations ou en multiplier une, par un scalaire non nul, ne change pas les solutions ; passer de deux équations $L_1 = L_2 = 0$ à deux autres équations $L_1 + \alpha L_2 = L_2 = 0$ n'en change pas les solutions, d'où l'énoncé. □

Exemple : Le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 & +2x_3 & +3x_4 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & +7x_4 & = 2 \end{cases}$$

possède les mêmes solutions que le système :

$$\begin{cases} x_1 & & & -\frac{9}{2}x_4 & = 3 \\ & x_2 & & -\frac{17}{4}x_4 & = -\frac{5}{2} \\ & & x_3 & -\frac{3}{4}x_4 & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Or résoudre ce dernier système est immédiat ; on donne une valeur arbitraire à x_4 et on en tire :

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{9}{2}x_4 + 3 \\ x_2 & = \frac{17}{4}x_4 - \frac{5}{2} \\ x_3 & = \frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

En vue de donner une autre preuve du théorème, interprétons les opérations élémentaires en termes de matrices : soit

$$E_{k,\ell} := \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & k & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \ell \end{array}$$

la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale qui valent 1 et le coefficient ℓk (ℓ-ème ligne et k-ème colonne) qui vaut α. Calculons EA en appelant a_{ij} les coefficients de A et c_{ij} ceux de EA. Un calcul direct donne que si $i \neq \ell$ alors $c_{ij} = a_{ij}$ alors que $c_{\ell j} = a_{\ell j} + \alpha a_{kj}$, donc :

Multiplier à gauche par E revient à transformer A en ajoutant à sa ℓ-ème ligne α fois sa k-ème ligne.

On vérifiera que :
Multiplier à gauche par

$$E_{i,j} := \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & j & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & i \end{array}$$

la matrice A revient à échanger les i-ème et j-ème lignes de A.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Multiplier à gauche par

$$E_i(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice A revient à multiplier la i-ème ligne de A par α.

En résumé on voit que l'on passe d'une matrice A_1 à une matrice A_2 par une suite d'opérations élémentaires si il existe une suite de matrices E_1,E_2, ..., E_r chacune de l'un des trois types précédents telles que $A_2 = E_1 E_2 \dots E_r A_1$. En particulier, si l'on revient aux systèmes linéaires, l'égalité $(A' \mid b') = E_1 E_2 \dots E_r (A \mid b)$ équivaut à $A' = E_1 E_2 \dots E_r A$ et $b' = E_1 E_2 \dots E_r b$ donc les systèmes $AX = b$ et $A'X = b'$ sont équivalents.

Voyons maintenant quelle est la forme la plus simple que l'on puisse obtenir pour une matrice (ou un système linéaire).

Définition: Une matrice est *échelonnée* si

1) Le premier coefficient non nul d'une ligne est 1 (on dit que c'est un *pivot*).

2) Le premier coefficient non nul de la $(i+1)$-ème ligne est à droite de celui de la i-ème ligne.

3) Les coefficients au dessus d'un pivot sont nuls.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont échelonnées.

Remarques : Une ligne est soit nulle soit de la forme $(0, \dots, 0, 1, *, \dots, *)$; si une ligne est nulle, toutes les lignes situées en dessous sont nulles.

Indiquons comment, en pratique, on peut appliquer des transformations élémentaires à n'importe quelle matrice pour la rendre échelonnée : on choisit un coefficient non nul situé le plus à gauche possible ; par multiplication par un scalaire et échange des lignes on se ramène au cas ou ce coefficient est 1 et est situé sur la première ligne :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 & * & * \\ 0 & & 0 & * & * & * \\ 0 & & 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

En ajoutant à chacune des lignes un multiple adéquat de la première ligne on fait apparaître des zéros en dessous du pivot 1 de la première ligne. On répète l'opération sans toucher la première ligne et au bout d'un certain temps on arrive à une matrice du type :

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

Et il ne reste qu'à faire apparaître des zéros au dessus de chaque pivot, ce qui peut se faire en retranchant un multiple adéquat de la ligne du pivot.

Il nous reste à discuter de la résolution des systèmes échelonnés.

THÉORÈME: *Soit $AX = b$ un système d'équation tel que la matrice $(A|b)$ soit échelonnée.*

1) Le système possède une solution si et seulement si il n'y a pas de pivot sur la dernière colonne.

2) Si il n'y a pas de pivot sur la dernière colonne, la solution générale du système s'obtient en fixant arbitrairement chacun des x_i tels que la i-ème colonne ne contienne pas de pivot et en calculant chacun des autres x_i en fonction de ceux-là grâce à l'équation correspondant à la i-ème ligne.

Exemples : La matrice

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

possède un pivot sur la dernière colonne et le système associé :

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & +2x_5 & = 0 \\ & & x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = 0 \\ & & & & 0 & = 1 \end{cases}$$

n'a évidemment pas de solution.

La matrice

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne possède pas de pivot sur la dernière colonne et le système associé a pour solutions $x_1 = 2 - x_4 - 2x_5$, $x_3 = 1 - 3x_4 - 4x_5$, les coordonnée x_2,x_4 et x_5 des solutions étant arbitraires.

COROLLAIRE: *Un système linéaire homogène (c'est-à-dire $b = 0$) avec m équations, n inconnues et $n > m$ possède au moins une solution non nulle.*

Démonstration: En effet un système homogène possède toujours une solution : le vecteur nul ; ensuite le décompte des équations et variables entraîne que, une fois le système rendu échelonné, une variable au moins va pouvoir prendre n'importe quelle valeur. □

APPLICATION: Calcul de l'inverse d'une matrice par opération élémentaires :

Pour calculer l'inverse d'une matrice A carrée $n \times n$ on réduit par opération élémentaires la matrice $(A \mid I_n)$ à une matrice échelonnée ; si la matrice A est inversible la matrice échelonnée obtenue sera $(I_n \mid A^{-1})$.

Démonstration: La seule matrice carrée inversible et échelonnée est l'identité, donc la réduction de la matrice A est de la forme suivante : $E_r \dots E_1 A = I$ avec E_i des matrices correspondant à des opérations élémentaires. La réduction à une matrice échelonnée de $(A \mid I)$ est donc $E_r \dots E_1(A \mid I) = (I \mid E_r \dots E_1)$ mais l'identité $E_r \dots E_1 A = I$ signifie précisément que $E_r \dots E_1 = A^{-1}$. □

Exemple : soit $A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on peut calculer son inverse a l'aide des opérations :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 & -3/2 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut d'ailleurs vérifier directement.

Remarque : si en échelonnant la matrice $(A|I)$ on trouve une matrice $(B|C)$ avec $B \neq I$ alors on peut conclure que A n'est pas inversible. En effet il suffit d'observer que les matrices élémentaires sont toutes inversibles (permuter deux fois deux lignes revient à ne rien changer, de même ajouter puis retrancher un multiple d'une ligne ou multiplier puis diviser par un scalaire non nul).

Exemple : cherchons par cette méthode l'inverse, s'il existe de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

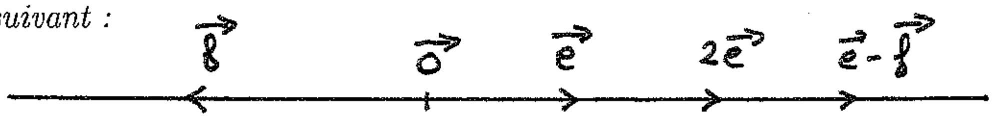
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donc A n'est pas inversible.

Hamilton William Rowan (1805–1865)

CHAPITRE 8 ESPACES VECTORIELS

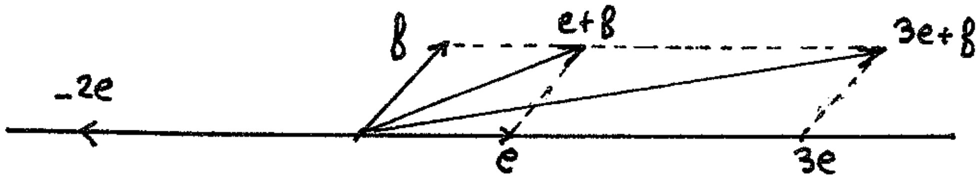
Le petit prince demanda "Dessine-moi un espace vectoriel". Le pilote commença par le dessin suivant :



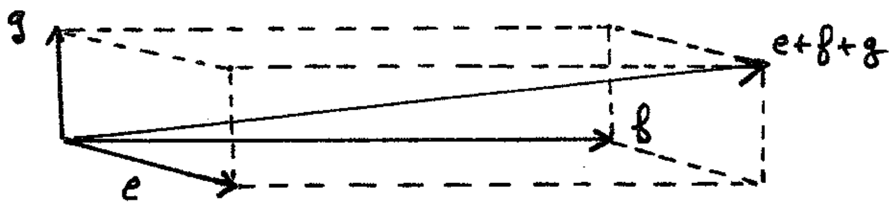
et lui commenta : "Voila, les vecteurs c'est comme ça, on les note avec des flèches au-dessus, on peut les ajouter, les multiplier par un nombre".

Le petit prince, un peu étonné, lui répondit, non sans quelques raisons : "Mais pourquoi parler de vecteurs pour ajouter des nombres? Et mettre des flèches, c'est un peu enfantin, non? Tu crois que je ne saurai pas reconnaître un vecteur sans sa flèche?"

Un peu vexé, Antoine essaya un deuxième dessin en se justifiant ainsi : "C'était un espace vectoriel de dimension 1, en voila un de dimension 2 ; et je t'ai enlevé les flèches!"



L'enfant contempla le nouveau dessin et ajouta un peu perplexe : "Ecoute, ta planète n'est déjà pas vraiment plate, mais la mienne ne l'est vraiment pas !". L'aviateur grommela "Bon d'accord" et dessina ceci :



Le petit prince contempla avec plaisir ce troisième dessin mais au bout d'un moment il s'inquiéta : "Mais ... on ne peut pas voir les mouvements ... le temps ... est-ce-qu'on ne pourrait pas rajouter une dimension?". Carrément agacé, l'homme fit le dessin suivant :

et ajouta : "Tiens! J'ai mis dans ce coffre un cours d'algèbre linéaire où tu trouveras des espaces de dimension 4 et aussi de dimension n et peut-être même (je ne me souviens plus) des exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie".

Le petit prince s'en fut, très content.

8.1 INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE

L'exemple type de l'espace vectoriel, au niveau de ce cours, est l'espace $\mathbf{R}^n$. Nous noterons le plus souvent $e = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément (un *vecteur*) de $\mathbf{R}^n$ et nous appellerons *coordonnées* du vecteur e les nombres réels x_i. On utilisera toutefois aussi, de temps en temps, la notation en vecteur colonne $e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On dispose de deux opérations fontamentales sur $\mathbf{R}^n$:
l'addition :
si $e = (x_1, \ldots, x_n)$ et $f = (y_1, \ldots, y_n)$ alors

$$e + f := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

la multiplication par un scalaire :
si $e = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ alors

$$\alpha . e := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Bien entendu on ne peut "dessiner" cet espace que lorsque $n = 1, 2$ ou 3. Nous ne formalisons les propriétés d'un espace vectoriel que dans le paragraphe suivant, mais sur cet exemple les propriétés sont bien connues.

Pourquoi considérer une dimension quelconque? Une première (et mauvaise?) réponse est que les mathématiciens aiment bien travailler dans la plus grande généralité possible et que ce sont eux qui décident du contenu des cours de première année. Une deuxième (et meilleure?) réponse est que presque tous les problèmes de la vie courante moderne conduisent à des espaces de dimension plus grande que 4. Nous ne pensons pas à l'espace-temps de dimension 4 dans la théorie d'Einstein, mais à n'importe quelle gestion de banque ou d'entreprise. Une entreprise qui évalue ses stocks va devoir noter la quantité de liquidités, de bien immobiliers, de machines, des produits stockés ou fabriqués. Prenons un petit exemple : un agriculteur produit des pommes de terre, du tournesol, du fourrage, du blé et des olives. Pour noter sa production annuelle (disons en tonnes) il a besoin d'un vecteur avec cinq coordonnées $p = (x_1, \ldots x_5)$. Si la production des mêmes produits par un autre agriculteur est $p' = (x'_1, \ldots x'_5)$ alors leur production totale sera représentée par la somme des deux vecteurs p et p'. Si l'on veut la production en kilo du premier, elle sera donnée par le vecteur $1000p = (1000x_1, \ldots 1000x_5)$.

Le bureau des douanes (ministère du commerce extérieur) comptabilise les importations/exportations de plusieurs milliers de produits (ayant chacun plusieurs paramètres : prix, code du pays, etc). Il est clair que la manipulation de telles données se fait sur ordinateur et qu'il y a donc besoin de procédures mathématiques (et de personnel sachant les utiliser!).

Quels sont les problèmes posés qu'on veut résoudre? L'algèbre linéaire est un outil précieux pour l'étude de la géométrie. Nous aborderons ceci à partir d'exemples. L'archétype du problème d'algèbre linéaire est un système linéaire :

Exemple (simple) :

On dispose d'un budget de 200F pour préparer une sangria en mélangeant deux proportions de jus de fruit pour une proportion de vin ; sachant que le vin coûte 20F le litre et le jus de fruit 10F le litre combien de litres de sangria pourra-t-on préparer?

Appelons x le nombre de litres de vin et y le nombre de litres de jus de fruits, le problème se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} y = 2x \\ 20x + 10y = 200 \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément $20x + 10(2x) = 200$ et donc $x = 5$ et $y = 10$. On pourra donc préparer 15 litres.

Un système linéaire général à n inconnues et m équations s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(où les a_{ij} et les b_i sont des constantes et les x_j sont les inconnues). Si n et m sont grands (de l'ordre de quelques milliers par exemple) on ne peut résoudre "à la main" ces systèmes et on a développé au chapitre précédent un algorithme pour les traiter. Les systèmes linéaires ont tous une structure similaire : si l'on considère le système obtenu en remplaçant les b_i par 0, qu'on appelle le *système linéaire homogène associé* :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

on voit que les solutions forment un espace vectoriel contenu dans $\mathbf{R}^n$ (la définition formelle n'est donnée qu'au paragraphe suivant) : la somme de deux solutions est encore une solution, le produit par un scalaire d'une solution est encore une solution. De plus si l'on connaît une solution particulière du système de départ, toutes les autres sont sommes de la solution particulière et d'une solution du système homogène.

Exemple : une solution du système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

est donnée par $(2, 0, -1)$ (vérification directe) alors que le système homogène

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

a pour solutions les vecteurs de la forme $(-3t, t, 2t)$ avec $t \in \mathbf{R}$. Ainsi les solutions du système de départ sont toutes données par $(-3t + 2, t, 2t - 1)$ quand t varie.

Ces équations linéaires définissent aussi les objets géométriques simples comme les droites, les plans :

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, l'équation $ax + by = c$ (où a, b, c sont des constantes) définit une droite (sauf si $a = b = 0$). Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ l'équation $ax + by + cz = d$ (où a, b, c, d sont des constantes) définit un plan (sauf si $a = b = c = 0$) mais il faut deux équations pour définir une droite. Toutefois deux équations linéaires dans $\mathbf{R}^3$ ne définissent pas toujours une droite : par exemple les équations $2x - y + 3z = 2$, $-6x + 3y - 9z = -6$ définissent un plan.

8.2 ESPACES VECTORIELS

Ce paragraphe contient la formalisation de la notion d'espace vectoriel. On ne gagne rien à supposer que le corps de base est toujours $\mathbf{R}$*, on travaillera donc sur un corps* K*, mais dans les exemples, on pourra supposer* $K = \mathbf{R}$*. Si le goût du lecteur l'incline vers les situations concrètes ou le souci du "À quoi ça sert?", il pourra méditer le fait que la théorie des codes de télécommunication utilise largement les espaces vectoriels sur les corps finis* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$*.*

Définition: Un *espace vectoriel* sur un corps K est un ensemble E, muni de deux lois $(+, .)$, la loi $+$ étant une application de $E \times E$ vers E, la loi . ("multiplication par un scalaire") étant une application $K \times E$ vers E, telles que :

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif (avec élément neutre noté 0 ou 0_E).
2) $\forall a \in K,\ x, y \in E\ \ a.(x + y) = a.x + a.y$
3) $\forall a, b \in K,\ x \in E\ \ (a + b).x = a.x + b.x$
3) $\forall a, b \in K,\ x \in E\ \ (ab).x = a.(b.x)$
4) $\forall x \in E\ \ 1.x = x$

Convention : On omettra très souvent le point notant la multiplication par un scalaire. On dira souvent un K-espace vectoriel au lieu d'un espace vectoriel sur K

Exemples : on vérifie (immédiatement) que $(K^n, +, .)$ (où l'addition et la multiplication par un scalaire sont définies comme au paragraphe précédent pour $\mathbf{R}^n$) est un espace vectoriel.

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel (comme c'est un sous-ensemble de K^n l'addition et la multiplication par un scalaire sont déjà définies).
- L'ensemble des matrices $m \times n$ est un espace vectoriel.
- Le corps des complexes $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel de deux façons (au moins) : c'est d'abord un espace vectoriel sur lui-même, mais c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
- L'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel : si f, g sont des fonctions et α un réel, on pose $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ et $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.
- L'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. En effet la somme de deux fonctions continues est continue de même que le produit par une constante.
- L'espace des fonctions $f(t)$ deux fois dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et vérifiant l'équation différentielle :

$$f''(t) + cos(t)f'(t) + 3tf(t) = 0$$

est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. En effet la somme de deux fonctions deux fois dérivables et vérifiant l'équation différentielle est encore deux fois dérivable et vérifie l'équation différentielle (voir le chapitre 20 pour l'utilisation de cet exemple).

- L'ensemble $K[X]$ des polynômes forme un K-espace vectoriel.

- L'ensemble des suites $u := (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles forme un espace vectoriel : si $u := (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v := (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites et α un réel, on pose $u + v := (u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\alpha u := (\alpha u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

- L'ensemble des suites réelles $u := (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_n + (2n+1)u_{n-1} + n^2 u_{n-2} = 0$$

forme un espace vectoriel. En effet la somme de deux telles suites et le produit par une constante est encore une suite du même type (voir le chapitre 12 pour l'utilisation de cet exemple).

On peut aussi à partir d'espaces vectoriels donnés en fabriquer d'autres.

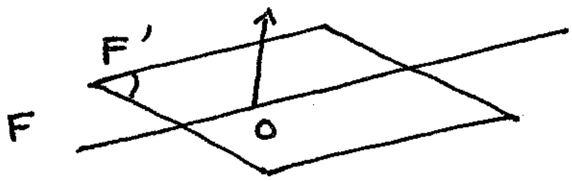
Définition: Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un *sous-espaces vectoriel* si muni des deux lois de E (restreintes à F) il devient un espace vectoriel.

Cela signifie donc que la loi d'addition est une loi interne de $F \times F$ dans F, que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x \in F$ on a $\lambda x \in F$ et que F muni de ces deux opérations vérifie les axiomes d'un espace vectoriel.

PROPOSITION: *Soit $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si on a :*
(i) $0_E \in F$
(ii) $\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x, y \in F,\ \alpha x + \beta y \in F$

Démonstration: En effet cette condition équivaut au fait que l'addition et la multiplication par un scalaire (dans E) définissent bien deux lois $F \times F \to F$ et $K \times F \to F$ et les axiomes d'espace vectoriel sont alors vérifiés puisqu'ils le sont dans E. □

Exemples : Une droite passant par l'origine, un plan passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. Si $x \in E$ (et $x \neq 0$) alors l'ensemble des vecteurs αx (où α parcourt K) est un sous-espace vectoriel : c'est "la droite engendrée par x".



Comme application, on peut observer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel mais que l'union n'est pas un sous-espace vectoriel (sauf si l'un des deux espaces contient l'autre).

Si F, F' sont des sous-espaces vectoriels de E on peut définir leur *somme* comme :

$$F + F' := \{f + f' \mid f \in F \text{ et } f' \in F'\}$$

On dira que les deux sous-espaces vectoriels sont en *somme directe* si $F \cap F' = \{0\}$ et on notera, dans ce cas la somme $F \oplus F'$.

Si S est un sous-ensemble de E, on peut définir l'*espace vectoriel engendré par S* comme la somme des droites engendrées par les éléments de S. Par exemple si $e := (1, 0, 0)$,

$f := (0,1,0)$, $g := (1,1,0)$ et $h := (0,0,1) \in \mathbf{R}^3$ alors l'espace vectoriel engendré par $\{e, f, g\}$ est un plan alors que l'espace vectoriel engendré par $\{e, f, h\}$ est l'espace $\mathbf{R}^3$ tout entier. Les sous espaces engendrés par $\{e, f\}$ et par $\{f, g\}$ ne sont pas en somme directe mais les sous espaces engendrés par $\{e, f\}$ et par $\{h\}$ sont en somme directe.

Notation : Soit $e_1, \dots, e_r$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble des combinaisons linéaires des $e_1, \dots, e_r$ est un sous-espace vectoriel de E, on le note :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) = \{x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \subset \mathbf{R}\}$$

Si E, F sont des espaces vectoriels, on peut définir de manière naturelle une structure d'espaces vectoriel sur le produit :

$$\forall x, x' \in E,\ y, y' \in F : \quad (x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y)$$

Par exemple $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ s'identifie à $\mathbf{R}^{m+n}$.

8.3 BASES ET DIMENSION

Dans tout ce paragraphe on travaille dans un espace vectoriel E sur un corps K que l'on pourra prendre égal à $\mathbf{R}$. Ce paragraphe donne une définition précise de la notion de dimension d'un espace vectoriel et est fondamental pour la suite. Le point clef est qu'un espace vectoriel E (de dimension finie) est toujours isomorphe à K^n et plus précisément qu'il existe n vecteurs $e_1, \dots, e_n$ tels que tout vecteur de E s'écrivent de façon unique comme combinaison linéaire des e_i. Ceci généralise la notion de repère du plan (deux vecteurs) et de l'espace (trois vecteurs).

Commençons par un peu de vocabulaire :

Une *famille* de vecteurs est une suite (finie dans la pratique) de vecteurs indexés par un ensemble I (dans la pratique on prend souvent $I := \{1, \dots, n\}$) ; on note $(e_i)_{i \in I}$ une telle famille.

Une *combinaison linéaire* des vecteurs e_i est un vecteur x de la forme $x := \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i \in K$; si l'ensemble I est infini on impose que pour tout $i \in I$, sauf un nombre fini, on ait $\alpha_i = 0$.

Définition: 1) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs est *libre* si la seule combinaison linéaire nulle des e_i est obtenue en prenant tous les α_i nuls ; elle est *liée* si elle n'est pas libre.

2) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs est *génératrice* de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des e_i.

3) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une *base* si elle est libre et génératrice.

Exemples : 1) Une famille contenant le vecteur nul 0 ou bien contenant deux vecteurs égaux est liée. Plus généralement une famille est liée si et seulement l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs.

2) Prenons $E := \mathbf{R}^3$ et

$$e_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ e_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie les relations : $e_3 = e_1 - 3e_2$ et $2e_4 = e_2 + e_3$ ainsi la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ n'est pas libre, la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ non plus. Par contre la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre ; en effet si $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$ alors $\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ ce qui entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Géométriquement cela traduit que les deux vecteurs e_1, e_2 ne sont pas situés sur une même droite : ils ne sont pas colinéaires ; par contre les quatre vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 sont tous situés dans un même plan P. On peut d'ailleurs vérifier que ce plan est donné par :

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Considérons maintenant le vecteur $e_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et vérifions que $\{e_1, e_2, e_5\}$ forme une base de $E = \mathbf{R}^3$. Tout d'abord prouvons que cette partie est libre : pour cela on considère une combinaison linéaire nulle : $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_5 = 0$; ceci équivaut à : $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0, 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $4\alpha_1 - \alpha_2 = 0$; en sommant les deux dernières égalités on obtient $3\alpha_1 = 0$ donc $\alpha_1 = 0$ puis $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Pour montrer (directement) que $\{e_1, e_2, e_5\}$ est génératrice on doit montrer que pour tout vecteur $e := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ il existe une combinaison linéaire telle que $e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_5$. Ceci équivaut à $\alpha_1 + \alpha_3 = a, \alpha_1 + \alpha_2 = b$, $2\alpha_1 - \alpha_2 = c$ dont on détermine l'unique solution $\alpha_3 = (3a - b - c)/3$, $\alpha_2 = (2b - c)/3$ et $\alpha_1 = (b + c)/3$.

3) (Base canonique) Il est facile de vérifier que dans K^n, les vecteurs $e_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, $e := (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, e_n := (0, \ldots, 0, 1)$ forment une base : en effet tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i de la façon suivante : $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Cette base s'appelle la *base canonique* de K^n.

Commentaires : On voit que si l'on considère une famille finie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et si l'on examine les combinaisons linéaires de ces vecteurs :

1) Si la famille est libre, un vecteur, qui est combinaison linéaire, l'est de manière unique.

2) Si la famille est génératrice, tout vecteur est combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, autrement dit $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est l'espace tout entier.

3) Si la famille est une base, tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire. En d'autres termes l'application de K^n vers E donnée par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ est une bijection.

Nous dirons (provisoirement) qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* si il admet une famille génératrice finie.

Exemple : L'espace vectoriel $K[X]$ n'est pas de dimension finie sur K. En effet si $P_1, \ldots, P_n$ est une famille finie de polynômes, soit $d := \max(deg(P_i))$, alors toute combinaison linéaire des P_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à d.

L'espace vectoriel K^n est de dimension finie (heureusement ...) puisque les vecteurs $e_i := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (avec un 1 sur la i-ème coordonnée) forment une base. Nous allons maintenant voir que tout espace vectoriel de dimension fini est en fait de ce type.

PROPOSITION: *Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E, soient $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des combinaisons linéaires des $e_1, \ldots, e_n$, alors la famille des f_j est liée.*

Démonstration: Ecrivons $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$, alors $\sum_{i=1}^{n+1} x_i f_i = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} x_i\right) e_j$ mais on sait que le système $\sum_i a_{ij} x_i = 0$ pour $j = 1, \ldots, n$ possède une solution non nulle car c'est un système homogène avec plus d'inconnues que d'équations (la démonstration de ce fait a été donnée en étudiant la méthode du pivot au chapitre 7) ; donc celle-ci fournit une combinaison linéaire des f_i qui est nulle. $\square$

COROLLAIRE: *Deux bases ont toujours le même cardinal.*

Démonstration: Soient $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_m$ deux bases. Si on avait $m > n$, comme les f_j sont des combinaisons linéaires des e_i, on en tirerait que les f_j sont liés, ce qui n'est pas. On a donc établi que $m \leq n$ et par symétrie $n \leq m$ et donc $m = n$. $\square$

Remarque : le corollaire reste vrai si l'espaces est de dimension infinie, mais la preuve est plus difficile.

THÉORÈME: *(de la base incomplète) Soit $\mathcal{L}$ une partie libre de E contenue dans $\mathcal{G}$ une partie génératrice de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E contenant $\mathcal{L}$ et contenue dans $\mathcal{G}$.*

Le nom du théorème provient du fait qu'il indique que l'on peut compléter la partie libre $\mathcal{L}$ en une base (à l'aide d'éléments d'une partie génératrice). On pourrait aussi l'appeler "théorème de la base extraite" puisqu'il dit aussi que l'on peut extraire une base de toute partie génératrice.

Démonstration: Choisissons un sous-ensemble $\{b_1, b_2, \ldots\} = \mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ donnant une partie libre, contenant $\mathcal{L}$ et de cardinal maximal pour ces propriétés ; montrons que c'est bien une base. Il suffit de voir que c'est une partie génératrice ; mais comme tout vecteur est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{G}$, il suffit de voir qu'un vecteur de $\mathcal{G}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Soit donc e un vecteur de $\mathcal{G}$ alors la famille $\mathcal{B} \cup \{e\}$ est liée et la relation de dépendance linéaire $\beta e + \sum \alpha_i b_i = 0$ ne peut pas correspondre à $\beta = 0$ (sinon les $b_i \in \mathcal{B}$ seraient liés) et permet donc d'exprimer e comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. $\square$

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE: *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base (finie).*

Démonstration: On prend une partie génératrice finie et on peut en extraire une base. $\square$

Toutes les bases ayant même cardinal, on peut définir :

Définition: Le cardinal d'une base de E s'appelle la *dimension* de E. On le note $\dim(E)$.

Définition: La dimension de l'espace vectoriel engendré par un système de vecteurs $\{u_i \mid i \in I\}$ s'appelle le *rang* du système. En d'autres termes le rang de $\{u_i \mid i \in I\}$ est $\dim \mathrm{Vect}(u_i \mid i \in I)$.

Ainsi un espace est de dimension n si l'une de ses bases (et donc toutes) est de cardinal n. La dimension est l'invariant le plus important d'un espace vectoriel. L'espace K^n à une base de cardinal n et est donc bien de dimension n (ouf!) et en fait si E est de dimension n sur K et a pour base $e_1, \ldots, e_n$, l'application $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ est une bijection (et même un isomorphisme dès que nous aurons vu la notion d'application linéaire).

COROLLAIRE: *Soit F un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel de dimension finie, alors il existe un autre sous-espace vectoriel F' tel que $E = F \oplus F'$. On dit que F' est un supplémentaire de F dans E.*

Démonstration: On choisit une base de F, disons $e_1, \ldots, e_m$ que l'on complète en une base de E, disons $e_1, \ldots, e_n$; alors le sous-espace vectoriel F' engendré par $e_{m+1}, \ldots, e_n$ répond à la question. □

Un supplémentaire n'est pas unique ; un décompte des cardinaux des diverses bases montre que la dimension du supplémentaire est indépendante du choix du supplémentaire et vaut $\dim(E) - \dim(F)$.

COROLLAIRE: *Supposons que E est de dimension n alors :*

1) Toute famille libre est de cardinal au plus n (avec égalité si et seulement si c'est une base).

2) Toute famille génératrice est de cardinal au moins n (avec égalité si et seulement si c'est une base).

Démonstration: 1) Une partie libre peut être complétée en une base de cardinal n et a donc un cardinal $\leq n$ avec égalité si il n'y a pas besoin de compléter, i.e. si c'est une base.

2) Si une partie est génératrice, on peut trouver un sous-ensemble qui est une base de cardinal n, donc le cardinal est au moins n avec égalité si la partie génératrice est une base. □

En particulier, dans un espace de dimension n, le rang d'un système $u_1, \ldots, u_m$ est toujours inférieur ou égal à $\min(m, n)$, il est égal à m si et seulement si le système est libre et il est égal à n si et seulement si le système est générateur.

COROLLAIRE: *1) Si $F \subset E$ alors $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $E = F$.*

2) $\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F$

3) $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

Démonstration: Ces trois énoncés peuvent se démontrer en dénombrant des bases de chacun des espaces vectoriels. Ainsi pour 1) on complète une base $e_1, \ldots, e_m$ de F en une base $e_1, \ldots, e_n$ de E et bien sûr $m \leq n$, l'égalité ayant lieu si $E = F$. Pour 2) on constate que l'union d'une base de E et d'une base de F est disjointe et donne une base de $E \oplus F$.

Pour 3) on observe que si $e_1, \ldots, e_m$ est une base de E et $f_1, \ldots, f_n$ est une base de F alors $(e_1, 0), \ldots, (e_m, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_n)$ fournit une base de $E \times F$. $\square$

Descartes René (1596–1650)

CHAPITRE 9 APPLICATIONS LINÉAIRES

On formalise dans ce chapitre le deuxième concept abstrait fondamental en algèbre linéaire : celui d'application linéaire ; le lecteur connait déjà un bon nombre d'exemples : hormis les applications définies par des matrices, on étudie au lycée des rotations, symétries, projections, homothéties que l'on retrouve ici.

9.1 THÉORÈME DE LA DIMENSION

Définition: Soient E, F des K-espaces vectoriels, une application $u : E \to F$ est *K-linéaire* (ou *linéaire* si le contexte est clair) si elle vérifie :

$$\forall e_1, e_2 \in E,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \quad u(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 u(e_1) + \alpha_2 u(e_2)$$

Exemple : si $E = K^n$ et $F = K^m$ alors toute matrice A $m \times n$ définit une application $X \mapsto AX$ (où X est un vecteur colonne) de E vers F qui est linéaire puisque $A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2$.

On utilise fréquemment la linéarité de la dérivation, de l'intégrale ; traduit en termes d'espaces vectoriels cela signifie que, par exemple l'application $f \mapsto f'$ qui a une fonction associe sa dérivée est linéaire (de l'espace des fonctions dérivables dans l'espace des fonctions), que l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est linéaire (de l'espace des fonctions continues dans $\mathbf{R}$ disons). Voyons comment u agit sur les sous-espaces vectoriels :

PROPOSITION: *Soient E, F des K-espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers F, l'image d'un sous-espace vectoriel de E par u est un sous-espace vectoriel de F, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par u est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration: Soit E' un sous-espace vectoriel de E, soient $y_1, y_2 \in u(E')$ alors il existe $x_1, x_2 \in E'$ tels que $y_i = u(x_i)$ donc $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(E')$; donc $u(E')$ est un sous-espace vectoriel. Par ailleurs si F' est un sous-espace vectoriel de F et si $x_1, x_2 \in u^{-1}(F')$ alors $u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) \in F'$ donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in u^{-1}(F')$ et $u^{-1}(F')$ est bien un sous-espace vectoriel. □

En particulier le *noyau* de u, l'ensemble $\mathrm{Ker}(u) := \{x \in E \mid u(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et l'*image* de E par u, l'ensemble $\mathrm{Im}(u) := \{y \in F \mid \exists x \in E,\ u(x) = y\}$ est un sous-espace vectoriel de F. On vérifie aisément que :

- Une application linéaire u est injective si et seulement si son noyau est nul : $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$

- Une application linéaire u est surjective si et seulement si l'image d'une partie génératrice est génératrice.

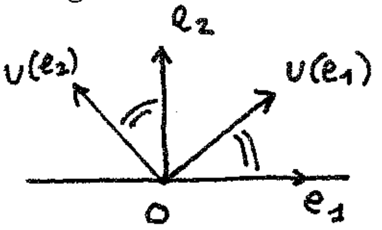
Définition: Un *isomorphisme d'espaces vectoriels* est une application linéaire $u : E \to F$ qui est bijective.

Remarque : il est immédiat que si u est bijective et linéaire, la bijection réciproque est aussi linéaire et que u transforme une base de E en une base de F.

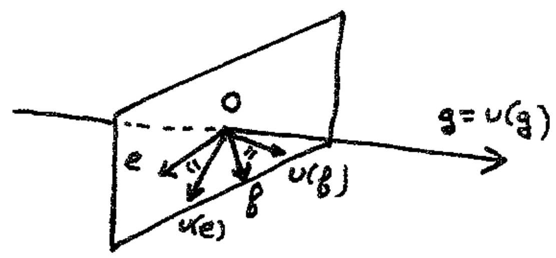
Exemples : Soit $u(x,y) := 2x + y$ de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ alors le noyau est la droite donnée par l'équation $2x + y = 0$ et l'image est $\mathbf{R}$ entier.

Soit $v(x,y,z) = (2x+y, 3y+z, z+y+x, x+y)$ de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^4$, alors un petit calcul fournit que $\mathrm{Ker}(v) = \{0\}$ et que l'image est l'hyperplan d'équation $-3X - Y + Z + 5T = 0$.

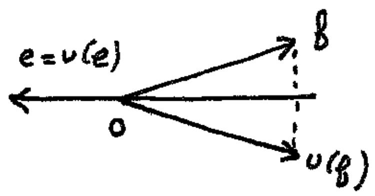
Une rotation, une symétrie, une homothétie de rapport non nul est bijective (noyau nul et image égale à l'espace entier). Une projection se fait parallèlement à son noyau et sur son image.



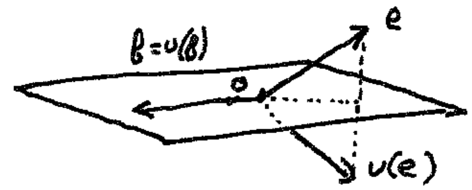
Rotation dans le plan



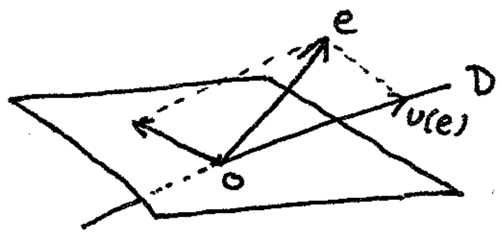
Rotation dans l'espace



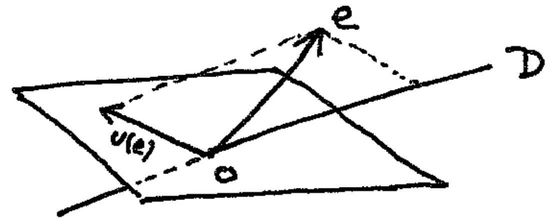
Symétrie dans le plan



Symétrie dans l'espace



Projection sur une droite parallèlement à un plan



Projection sur un plan parallèlement à une droite

Les rotations et les symétries sont des isomorphismes alors que les projections ne sont pas surjectives et ont un noyau non nul. On peut observer sur ces exemples la loi générale sur les dimensions que l'on énonce maintenant :

THÉORÈME: *Soient E, F des K-espaces vectoriels et u une application linéaire de$E$ vers F, alors*

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u)$$

Démonstration: Soit E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ (i.e. $E' \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$) alors la restriction de u à E' avec pour but $F' := \mathrm{Im}(u)$ est un isomorphisme $u' : E' \to F'$: en effet elle est surjective car si $y \in F'$ alors il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$ mais $x = x' + x''$ avec $x' \in E'$ et $x'' \in \mathrm{Ker}(u)$ donc $y = u(x) = u'(x')$; par ailleurs $\mathrm{Ker}(u') = \mathrm{Ker}(u) \cap E' = \{0\}$ donc u' est injective. On a donc $\dim E' = \dim \mathrm{Im}(u)$ et $\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim E' = \dim E$ d'où le théorème. □

COROLLAIRE: *$\dim u(E) \leq \dim E$ (avec égalité si et seulement si u est injective).*

Démonstration: En effet $\dim u(E) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(u) \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{Ker}(u)$ est nul c'est-à-dire si u est injective. □

COROLLAIRE: *Soient E, F des K-espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers F, supposons $\dim E = \dim F = n$, alors u est bijective si et seulement si elle est injective ou bien si et seulement si elle est surjective.*

Démonstration: L'application u est surjective si et seulement si $\dim \mathrm{Im}(u) = n$ donc si et seulement si $\dim \mathrm{Ker}(u) = 0$ c'est-à-dire si u est injective. □

COROLLAIRE: *Soient E et F des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel G.*

$$\dim E + \dim F = \dim(E + F) + \dim(E \cap F)$$

Démonstration: Considérons l'application linéaire $u : E \times F \to E + F$ donnée par $(x, y) \mapsto x + y$. Elle est surjective par construction et son noyau est le sous-espace vectoriel $\{(x, y) \in E \times F \mid x + y = 0\} = \{(x, -x) \mid x \in E \cap F\}$ qui est isomorphe à $E \cap F$. On en déduit que $\dim E + \dim F = \dim E \times F = \dim(E + F) + \dim(E \cap F)$. □

9.2 MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Un moyen simple de construire des applications linéaires est de fixer l'image des éléments d'une base de l'espace de départ $u(e_1), \ldots, u(e_n)$. Si l'on dispose d'une base de l'espace d'arrivée on peut exprimer les vecteur $u(e_i)$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base. On arrive à une description de u par un ensemble de nombres qui se range naturellement dans un tableau, i.e. une matrice. Cette construction est l'inverse de celle qui a une matrice A associe l'applicaton linéaire $X \mapsto AX$ et est extrêmement utile pour l'étude des applications linéaires et des matrices.

Définition: Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et $f_1, \ldots, f_m$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire, alors $u(e_j) := a_{1j} f_1 + \ldots + a_{mj} f_m$ et on définit la *matrice de u dans les bases $e = e_1, \ldots, e_n$, $f = f_1, \ldots, f_m$* comme :

$$Mat(u; (e), (f)) := (a_{ij})$$

Cette correspondance entre matrices et application linéaire est si naturelle que la composition d'application linéaires correspond à la multiplication des matrices :

THÉORÈME: *Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E, $f_1, \ldots, f_m$ une base de F et $g_1, \ldots g_k$ une base de G, soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires, alors*

$$Mat(v \circ u; (e), (g)) = Mat(v; (f), (g)) Mat(u; (e), (f))$$

Démonstration: Notons $B := Mat(v;(f),(g)) = (b_{ij})$ c'est-à-dire $v(f_j) = \sum_{i=1}^{k} b_{ij} g_i$ et $A := Mat(u;(e),(f)) = a_{ij}$ c'est-à-dire $u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$ et enfin $BA = (c_{ij})$ donc $c_{ij} = \sum_{h=1}^{m} b_{ih} a_{hj}$. On peut calculer :

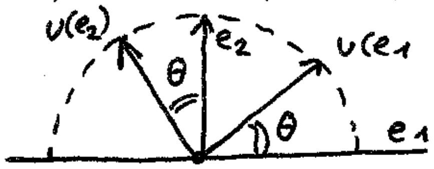
$$v \circ u(e_j) = v\left(\sum_{h=1}^{m} a_{hj} f_h\right) = \sum_{h=1}^{m} a_{hj}\left(\sum_{i=1}^{k} b_{ih} g_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{h=1}^{m} b_{ih} a_{hj}\right) g_i$$

□

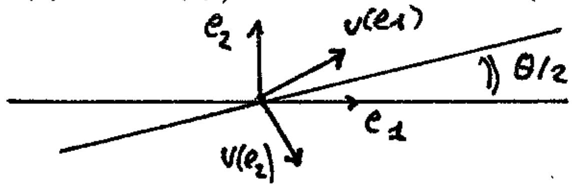
Remarque : soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_m$ la base canonique de $\mathbf{R}^m$ alors les vecteurs colonnes de la matrice de $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sont les vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_n)$.

Exemples : (on choisit la base canonique de $\mathbf{R}^2$ dans les exemples qui suivent)

La matrice d'une rotation u d'angle θ est donnée par $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. En effet $u(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $u(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.



La matrice de la symétrie par rapport à la droite faisant un angle $\theta/2$ avec l'axe des x est donnée par $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. En effet $u(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $u(e_2) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.



La matrice de la projection sur l'axe des x parallèlement à l'axe des y est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice d'une homothétie de rapport α est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

APPLICATION: Formules d'addition de cosinus et sinus :

En appliquant le théorème précédent à la composition de deux rotations d'angles θ et θ' on obtient $R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$ et donc :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} =$$

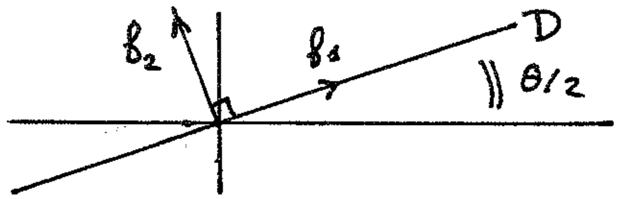
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \cos(\theta')\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta) & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien les formules d'addition de cosinus et sinus :

$$\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \text{ et } \sin(\theta+\theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)$$

9.3 CHANGEMENTS DE BASES

Reprenons l'exemple de la symétrie par rapport à une droite dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$; si l'on choisit comme base les vecteurs f_1, f_2 comme indiqué ci-dessous on obtient comme matrice pour la symétrie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



On se propose dans ce paragraphe de systématiser les calculs de ces changements de base. Le but est le plus souvent de trouver des bases dans lesquelles la matrice de l'application étudiée est la plus simple possible.

Définition: Soient $e_1, \ldots, e_n$ et $e'_1, \ldots, e'_n$ deux bases de E, la *matrice de passage* de e à e' est la matrice $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des composantes de e'_j dans la base $e_1, \ldots, e_n$.

En d'autres termes $P(e, e') = (a_{ji})$ avec $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

Commentaires : 1) La matrice $P = P(e, e')$ est aussi $Mat(id, (e'), (e))$ la matrice de l'application identité de E (muni de la base $e'_1, \ldots, e'_n$) vers E (muni de la base $e_1, \ldots, e_n$).

2) Si on pose $P' = P(e', e)$ alors $PP' = Id$ ou encore $P^{-1} = P(e', e)$.

3) Le sens d'écriture est bien sûr une convention ; l'important est d'être cohérent (on roule à gauche en Angleterre).

THÉORÈME: *Soit $u : E \to F$ une application linéaire et soient $e_1, \ldots, e_n$, $e'_1, \ldots, e'_n$ deux bases de E et $f_1, \ldots, f_m$, $f'_1, \ldots, f'_m$ deux bases de F ; notons A la matrice de u dans les bases e et f et A' la matrice de u dans les bases e' et f' ; notons encore $P = P(e, e')$ et $Q = P(f, f')$ les matrices de passage de e vers e' (resp. de f vers f'), alors :*

$$A' = Q^{-1} A P$$

Démonstration: Considérons la suite d'applications :

$$(E, e') \overset{id_E}{\to} (E, e) \overset{u}{\to} (F, f) \overset{id_F}{\to} (F, f')$$

On peut en déduire l'égalité de matrices :

$$Mat(u, (e'), (f')) = Mat(id_E, (f), (f'))Mat(u, (e), (f))Mat(id_E, (e'), (e))$$

ce qui correspond bien à l'égalité $A' = Q^{-1}AP$. $\square$

Exemples :

1) Considérons l'application linéaire u de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique e_1, e_2 est $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et choisissons $e_1' := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2' := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage de e vers e' est $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et son inverse se calcule facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs $u(e_1') = e_1'$ et $u(e_2') = 2e_2'$ donc la matrice de u dans la base e' est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; on vérifiera qu'on a bien

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Soit $u : E \to F$, on peut choisir des bases "bien adaptées" à u ainsi : pour E on choisit $e_1, \ldots, e_n$ de sorte que $e_{r+1}, \ldots, e_n$ forment une base du noyau de u et $e_1, \ldots, e_r$ forment une base d'un supplémentaire du noyau. Les vecteurs $f_1 = u(e_1), \ldots, f_r = u(e_r)$ sont linéairement indépendants et on peut les compléter en une base $f_1, \ldots, f_m$ de F ; la matrice de u s'écrit alors :

$$Mat(u; (e), (f)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & . & & & \\ 0 & & 1 & & \\ 0 & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier on voit que pour toute matrice A il existe P, Q inversibles telles que $Q^{-1}AP$ soit de la forme précédente. L'entier r est le *rang* de la matrice ou de l'application linéaire, c'est-à-dire la dimension de l'image. 3) Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et soit u la rotation d'angle $2\pi/3$ d'axe $e_1 + e_2 + e_3$. Choisissons $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$ et ensuite f_1, f_2 formant une base orthonormé du plan orthogonal à f_3 de sorte que f_1, f_2, f_3 forment une base directe de l'espace. Pour fixer les idées on peut prendre $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)$. Alors

$$Mat(u; (f)) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, en posant $P := P(e, f) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, on obtient

$$Mat(u; (e)) = P\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(exercice : vérifier que u est une isométrie du cube $\mathcal{C} := [-1, 1]^3$).