LISTE DES GROUPES SIMPLES FINIS

Définition. Un groupe fini est *simple* si ses seuls sous-groupes distingués sont triviaux (i.e. sous-groupe réduit à un élément ou groupe tout entier).

On voit facilement que les seuls groupes simples abéliens sont cycliques d'ordre premier, i.e. isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec p premier. Un des résultats remarquables d'algèbre de la fin du XXème siècle est la classification complète des groupes simples non abéliens. L'intérêt des groupes simples dans la classification des groupes finis est éclairé par le théorème de Jordan-Holder :

Définition. Une *suite de composition* d'un groupe G est la donnée d'une suite de sous-groupes emboités i.e. $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = \{e\}$ telle que $G_{i+1} \lhd G_i$ et G_i/G_{i+1} est simple. Une autre suite de composition $G = G'_0 \supset G'_1 \supset \ldots \supset G'_m = \{e\}$ est dite *équivalente* à la première si $m = n$ et il existe une permutation $\sigma : [1, n] \to [1, n]$ telle que $G_{\sigma(i)}/G_{\sigma(i)+1} \cong G'_i/G'_{i+1}$.

Remarquons que demander que G_i/G_{i+1} soit simple équivaut à demander que la suite G_i soit maximale au sens que si $G_i \supset H \supset G_{i+1}$ avec $H \lhd G_i$ alors $H = G_i$ ou G_{i+1}.

Théorème. (Jordan-Holder) *Soit G un groupe fini, alors G admet une suite de composition qui est unique à équivalence près.*

Les groupes finis se répartissent en plusieurs famille infinies, dont la plus connue est celle des groupes $\mathcal{A}_n$ (sous-groupe des permutations paires dans le groupe des permutations sur n lettres) qui est simple pour $n \geq 5$, et un résidu exotique dont les éléments sont appelés *groupes sporadiques.*

La classification exhaustive des groupes simples finis (non abéliens) a été achevé au début des années 80. Le plus petit groupe simple est $\mathcal{A}_5$, il a cardinal 60; le suivant est $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$, il a cardinal 168. On peut répartir les groupes simples non abéliens en 17 familles (infinies) auxquelles il faut ajouter 26 groupes exceptionnels appelés *groupes sporadiques.* Je ne dirai presque rien sur les groupes sporadiques sinon écrire dans un tableau leurs cardinaux et donner les noms de leurs découvreurs : Mathieu, Held, Janko, Conway, Lyons, O'Nan, Fischer, Fischer-Griess, Higman-Sims, Suzuki, McLaughlin, Rudvalis. Je ne vais pas décrire toutes les familles mais les principales.

Le groupe alterné. Lorsque $n \geq 5$ on a vu que le groupe $\mathcal{A}_n$ est simple.

Les autres familles sont des groupes *de type de Lie*, c'est-à-dire qu'ils correspondent à des groupes de Lie comme $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ sauf qu'au lieu de considérer des coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on choisit les coefficients dans un corps fini $\mathbf{F}_q$ où $q = p^r$ désigne le cardinal du corps.

Le groupe spécial linéaire. Le groupe $\mathrm{PSL}(n, \mathbf{F}_q) := \mathrm{SL}(n, \mathbf{F}_q)/Z$ est simple pour $n \geq 2$ où Z désigne le centre, c'est-à-dire le sous-groupe $\{aI \mid a \in \mathbf{F}_q,\ a^n = 1\}$. [Exceptions : $n = 2$ et $q = 2$ ou 3]

Le groupe symplectique. Le groupe $\mathrm{PSp}(2n, \mathbf{F}_q) := \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{F}_q)/Z$ est simple pour $n \geq 2$ où Z désigne le centre, c'est-à-dire le sous-groupe $\{\pm I\}$. Rappelons que le groupe symplectique est le groupe des matrices préservant une forme bilinéaire alternée non dégénérée; explicitement, si $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ on peut écrire $\mathrm{Sp}(2n, K) = \{A \in \mathrm{GL}(2n, K) \mid {}^tAJA = J\}$. [Exceptions : $n = 1$ et $q = 2$ ou 3; $n = 2$ et $q = 2$]

Le groupe orthogonal (on suppose ici que la caractéristique est $\neq 2$). Le commutateur du groupe orthogonal (groupe des isométries) d'une forme quadratique se note Ω. Sur un espace de dimension n sur $\mathbf{F}_q$ on distingue trois cas. Si n impair on choisit $Q(x) = x_1x_2 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1} + x_n^2$, on note $\mathrm{SO}(n, \mathbf{F}_q)$ le groupe des rotations, $\Omega_n(\mathbf{F}_q)$ le sous-groupe des commutateurs et $\mathrm{P}\Omega_n(\mathbf{F}_q)$ le quotient par le centre. Alors $\mathrm{P}\Omega_n(\mathbf{F}_q)$ est simple pour $n \geq 5$ (impair). Si $n = 2m$ est pair on distingue deux formes quadratiques $Q^+(x) = x_1x_2 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-1}x_n$ et $Q^-(x) = x_1x_2 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2} + x_{n-1}^2 - ax_n^2$ (avec $a \in \mathbf{F}_q^* \backslash \mathbf{F}_q^{*2}$), on note $\mathrm{SO}^+(n, \mathbf{F}_q)$ (resp. $\mathrm{SO}^-(n, \mathbf{F}_q)$) le groupe des rotations, $\Omega_n^+(\mathbf{F}_q)$ (resp. $\Omega_n^-(\mathbf{F}_q)$) le sous-groupe des commutateurs et $\mathrm{P}\Omega_n^+(\mathbf{F}_q)$ (resp. $\mathrm{P}\Omega_n^+(\mathbf{F}_q)$) le quotient par le centre. Alors $\mathrm{P}\Omega_n^+(\mathbf{F}_q)$ (resp. $\mathrm{P}\Omega_n^-(\mathbf{F}_q)$) est simple pour $n \geq 6$ (pair). Pour les petites dimensions, $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif, $\mathrm{P}\Omega(3, \mathbf{F}_q) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbf{F}_q)$ alors que $\mathrm{P}\Omega^+(4, \mathbf{F}_q) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbf{F}_q) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbf{F}_q)$ et $\mathrm{P}\Omega^-(4, \mathbf{F}_q) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbf{F}_{q^2})$. On a également $\mathrm{P}\Omega^+(6, \mathbf{F}_q) \cong$

$\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_q)$ et $\mathrm{P}\Omega^-(6, \mathbf{F}_q) \cong \mathrm{PSU}(4, \mathbf{F}_{q^2})$. Plus curieusement $\mathrm{card}(\mathrm{P}\Omega(2m+1, \mathbf{F}_q)) = \mathrm{card}(\mathrm{PSp}(2m, \mathbf{F}_q))$ et on a $\mathrm{P}\Omega(5, \mathbf{F}_q) \cong \mathrm{PSp}(4, \mathbf{F}_q))$ mais l'égalité de cardinaux ne correspond pas à un isomorphisme pour $m \geq 3$.

Le groupe unitaire. On note $x^\sigma := x^q$ l'automorphisme involutif de $\mathbf{F}_{q^2}$. On note $\mathrm{U}_n(\mathbf{F}_{q^2})$ le groupe des isométries de la forme hermitienne $H(x) = x_1 x_1^\sigma + \ldots + x_n x_n^\sigma$, puis $\mathrm{SU}_n(\mathbf{F}_{q^2}) = \mathrm{U}_n(\mathbf{F}_{q^2}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_{q^2})$ et enfin $\mathrm{PSU}_n(\mathbf{F}_{q^2})$ le quotient par le centre $Z = \{aI \mid a^{q+1} = 1\}$. Le groupe $\mathrm{PSU}_n(\mathbf{F}_{q^2})$ est simple pour $n \geq 2$. [Exceptions : $n = 2$ et $q^2 = 4$ ou 9; $n = 3$ et $q^2 = 4$]

Il existe en plus des groupes de type de Lie exceptionnels G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8 de dimension 14, 52, 78, 133 et 248 qui conduisent aussi à des groupes simples finis. Enfin il existe des formes "tordues" de certains de ces groupes que je ne décrirai pas. (Voir les deux tableaux et les références ci-dessous).

Quelques références :

Aschbacher, M. *The status of the classification of the finite simple groups.* Notices Am. Math. Soc. 51, No.7, 736-740 (2004).

Carter, R. *Simple groups of Lie type.* John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972,

Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The Classification of the Finite Simple Groups* American Math. Soc. 1994.

I. Les 17 familles infinies de groupes simples finis non abéliens et leurs cardinaux

Groupe	Autre nom	cardinal
$\mathcal{A}_n$		$\frac{n!}{2}$
$A_n(q)$ (1)	$PSL_{n+1}(q)$	$\frac{1}{(n+1,q-1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - 1)$
${}^2A_n(q)$ (1)	$PSU_{n+1}(q)$	$\frac{1}{(n+1,q+1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - (-1)^i)$
$B_n(q)$ (2)	$P\Omega_{2n+1}(q)$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$
${}^2B_n(q)$ (3)	$Sz(q)$	$q^2(q-1)(q^2+1)$
$C_n(q)$	$PSp_{2n}(q)$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$
$D_n(q)$	$P\Omega_{2n}^+(q)$	$\frac{1}{(4,q^n-1)} q^{n(n-1)}(q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$
${}^2D_n(q)$	$P\Omega_{2n}^-(q)$	$\frac{1}{(4,q^n+1)} q^{n(n-1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$
${}^3D_4(q)$		$q^{12}(q^2-1)(q^8+q^4+1)(q^6-1)$
$G_2(q)$		$q^6(q^2-1)(q^6-1)$
${}^2G_2(q)$ (4)		$q^3(q-1)(q^3+1)$
$F_4(q)$		$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$
${}^2F_4(q)$ (5)		$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)$
$E_6(q)$		$\frac{1}{(3,q-1)} q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$
${}^2E_6(q)$		$\frac{1}{(3,q+1)} q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)$
$E_7(q)$		$(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)$
$E_8(q)$		$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$

(1) $A_1(2)$, $A_1(3)$ et ${}^2A_2(2)$ sont résolubles.
(2) $B_2(2) = C_2(2)$ et $G_2(2)$ ont un sous-groupe des commutateurs d'indice 2 qui est simple.
(3) définis seulement pour $q = 2^{2n+1}$; ${}^2B_2(2)$ est résoluble
(4) définis seulement pour $q = 3^{2n+1}$; ${}^2G_2(3)$ a un sous-groupe des commutateurs d'indice 3 qui est simple.
(5) définis seulement pour $q = 2^{2n+1}$; ${}^2F_4(3)$ a un sous-groupe des commutateurs d'indice 2 qui est simple.

II. Les 26 groupes simples finis sporadiques et leurs cardinaux

groupe	cardinal du groupe et sa factorisation
M_{11}	$2^4.3^2.5.11 = 7920$
M_{12}	$2^6.3^3.5.11 = 95\ 040$
M_{22}	$2^7.3^2.5.7.11 = 443\ 520$
M_{23}	$2^7.3^2.5.7.11.23 = 10\ 200\ 960$
M_{24}	$2^{10}.3^3.5.7.11.23 = 244\ 823\ 040$
J_1	$2^3.3.5.7.11.19 = 175\ 560$
J_2	$2^7.3^3.5^2.7 = 604\ 800$
J_3	$2^7.3^5.5.17.19 = 50\ 232\ 960$
J_4	$2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.31.37.43 = 86\ 775\ 571\ 046\ 077\ 562\ 880$
HS	$2^9.3^2.5^3.7.11 = 44\ 352\ 000$
He	$2^{10}.3^3.5^2.7^3.17 = 4\ 030\ 387\ 200$
Mc	$2^7.3^6.5^3.7.11 = 898\ 128\ 000$
Suz	$2^{13}.3^7.5^2.7.11.13 = 448\ 345\ 497\ 600$
Ly	$2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67 = 51\ 765\ 179\ 004\ 000\ 000$
Ru	$2^{14}.3^3.5^3.7.13.29 = 36\ 481\ 536\ 000$
$O'N$	$2^9.3^4.5.7^3.11.19.31 = 460\ 815\ 505\ 920$
Co_1	$2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23 = 4\ 157\ 776\ 806\ 543\ 360\ 000$
Co_2	$2^{18}.3^6.5^3.7^2.11.23 = 296\ 137\ 949\ 184\ 000$
Co_3	$2^{10}.3^7.5^3.7.11.23 = 4\ 957\ 666\ 560\ 00$
Fi_{22}	$2^{17}.3^9.5^2.7.11.13 = 64\ 561\ 751\ 654\ 400$
Fi_{23}	$2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23 = 4\ 089\ 460\ 473\ 293\ 004\ 800$
Fi'_{24}	$2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29 = 1\ 255\ 205\ 709\ 190\ 661\ 721\ 292\ 800$
F_5	$2^{14}.3^6.5^6.7.11.19 = 273\ 030\ 912\ 000\ 000$
F_3	$2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31 = 998\ 205\ 382\ 766\ 592\ 000$
F_2	$2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.19.23.31.47 = 4\ 154\ 781\ 581\ 226\ 426\ 191\ 177\ 580\ 544\ 000\ 000$
F_1	$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71$
	$=\ 808\ 017\ 424\ 794\ 512\ 875\ 886\ 459\ 904\ 961\ 710\ 757\ 005\ 754\ 368\ 000\ 000\ 000$