CONJECTURES(*)

Introduction. Il est coutumier, en mathématiques, de baptiser *conjecture* un énoncé que l'on pense être vrai mais qui n'est pas démontré. Dans d'autres domaines des sciences, on parle plutôt d'hypothèse ; cependant le statut est différent : une *hypothèse* en physique, en biologie requiert des confirmations ou infirmations par l'expérience mais ne sera jamais *démontrée* formellement. Cette définition par la négative - est conjecture ce qui n'est pas démontré - est évidemment trop formelle, trop étroite pour appréhender la quête de l'intelligibilité sous-jacente à la conjecture mathématique. Il n'est pas question de définir ici la vérité et la démonstration, mais plutôt d'examiner les ressorts y menant. La vision des mathématiques comme un édifice reposant sur le socle des axiomes et procédant à la recherche de la vérité - des théorèmes - par déduction selon des règles formelles ne rend compte ni de leur développement historique ni de la réalité quotidienne du chercheur, pour qui la conjecture ou l'hypothèse est un pain quotidien, un ressort de l'imagination indispensable. Les conjectures apparaissent avant d'être prouvées et sont souvent "vérifiées" avant qu'un système axiomatique soit créé dans lequel une preuve peut être formalisée ; elles sont le fruit de tentatives de résoudre des problèmes par essai/erreur, par des expériences. Comme premier exemple, les énoncés de la Géométrie d'Euclide ont pour la plupart préexisté à leur insertion dans le système formel des *Éléments* qui restent encore aujourd'hui le modèle, le parangon de la littérature mathématique. L'histoire du célèbre "postulat" d'Euclide est à ce titre édifiante ; il peut se formuler ainsi : par un point du plan, il passe une droite et une seule parallèle à une droite donnée. Euclide avait formulé cet énoncé comme un axiome et il fut durant plus de vingt siècles considéré si intuitif que de nombreuses recherches tentèrent d'en fournir une démonstration. La découverte extraordinairement féconde de nouvelles géométries, dites non euclidiennes, contient et dépasse, en richesse, la preuve de l'impossibilité d'une telle démonstration. Descartes, dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* indique la nécessité d'une heuristique. Même si ses écrits contiennent une critique féroce des simples "conjectures" (entendues au sens de tentatives de deviner), ils soulignent le besoin d'une méthode pour trouver la vérité et constatent implicitement que la seule méthode analytique ne suffit pas.

1 - Exemples.

Comment naissent les conjectures aujourd'hui? Que disent là-dessus les mathématiciens de ce siècle? Les propos des mathématiciens sont évidemment plus pragmatiques sur ce sujet que ceux des philosophes. André Weil s'est exprimé de manière assez critique sur l'usage du mot conjecture :

≪ *Ceci me donne l'occasion de dire mon sentiment sur ce mot dont on a tant usé et abusé. Sans cesse le mathématicien se dit : "Ce serait bien beau" (ou :"Ce serait bien commode") si telle ou telle chose était vraie. Parfois il le vérifie sans trop de peine; d'autres fois il ne tarde pas à se détromper. Si son intuition a résisté quelques temps à ses efforts, il tend à parler de "conjecture", même si la chose a peu d'importance en soi. Le plus souvent c'est*

(*) Article dans le "Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences", dirigé par Dominique Lecourt, publié par les Presses Universitaires de France (P.U.F.) en 1999.

prématuré. En théorie des groupes, on a longtemps parlé d'une "conjecture de Burnside", qu'à vrai dire celui-ci, fort judicieusement, n'avait proposé que comme problème. Il n'y avait pas la moindre raison de croire que l'énoncé en question fût vrai. Finalement il était faux. Nous sommes moins avancés à l'égard de la "conjecture de Mordell". Il s'agit là d'une question qu'un arithméticien ne peut guère manquer de se poser; on n'aperçoit d'ailleurs aucun motif sérieux de parier pour ou contre. Peut-être dira-t-on que l'existence d'une infinité de solutions rationnelles pour une équation f(x,y)=0 en l'absence d'une raison algébrique qui la justifie, est infiniment peu probable. Mais ce n'est pas un argument... En ce qui concerne les questions posées à la fin de [Oeuvres, 1967a], tant de résultats partiels sont venus depuis lors s'ajouter aux miens qu'à présent je n'hésiterais plus, je crois à parler de "conjectures", encore que le terme "d'hypothèse de travail" soit peut-être plus approprié. En tout cas, s'il m'appartenait de donner un conseil à qui n'en demande point, je recommanderais d'employer désormais le mot de "conjecture" avec un peu plus de circonspection que dans ces derniers temps.≫

Cette distinction entre la"bonne" conjecture ou le problème profond et la question simplement non résolue est difficilement formalisable ; la première partie de cette citation rejoint d'ailleurs l'idée déjà évoquée de Descartes qui voyait une source d'erreurs dans la précipitation à juger sans avoir d'idées claires et distinctes ; mais la recherche de découvertes ne peut se contenter seulement d'éviter l'erreur et Weil a aussi glorifié l'imagination, l'inspiration mathématique :

≪ *Rien n'est plus fécond tous les mathématiciens le savent que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe, le pressentiment se change en certitude, les théories jumelles révèlent leurs sources communes avant de disparaître; comme l'enseigne la* Gita *on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.*≫

Le mot métaphysique est plutôt ici synonyme de rêve. La nécessité et la fécondité de l'analogie, de la généralisation, de l'intuition est claire pour le mathématicien. La profondeur d'une conjecture n'est pas forcément visible immédiatement, les développements ultérieurs révèlent souvent de nouvelles généralisations et l'ampleur de la vision première. La "conjecture" sans doute la plus célèbre de toutes les mathématiques (parmi les problèmes non résolus) est "l'hypothèse de Riemann" (1859) concernant la fonction "zêta" :

≪ *On trouve, en effet entre ces limites un nombre environ égal à celui-ci, de racines réelles et il est très probable que toutes les racines sont réelles. Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.*≫

La tradition a baptisé "hypothèse" cette énoncé que l'on appelerait plutôt "conjecture" de nos jours. L'hypothèse de Riemann peut être testée en calculant les premières racines (cela a été fait pour plusieurs millions d'entre elles) mais ces vérifications ne font que renforcer aux yeux des mathématiciens la plausibilité de la conjecture, sans la démontrer.

Un autre exemple permet d'illustrer le statut des conjectures. La meilleure façon connue d'empiler des billes dans un volume est celle du marchand d'oranges (par couches successives et décalées) et, comme le dit Rogers, ≪ *tous les physiciens savent et la plupart des mathématiciens croient [conjecturent] que* ≫[1] c'est la meilleure façon possible. Cette quête de la démonstration peut paraître stérile mais constitue bien sûr un pilier de la grammaire mathématique ; plus important peut-être, la preuve se révèle souvent plus riche encore que l'énoncé, en ce qu'elle suggère ou permet des liens insoupçonnés auparavant, des généralisations. Dans l'exemple précédent, il est probable qu'une démonstration fournirait aussi des idées ou même une démonstration sur la nature des meilleurs empilements possibles dans d'autres espaces. Cette notion de richesse, de fécondité de la démonstration par rapport à l'énoncé est par exemple le point de vue de Poincaré qui distingue d'ailleurs *vérification* et *démonstration*. La vérification n'apporte essentiellement rien de plus que l'énoncé, elle en est en quelque sorte une simple traduction. Divers mots ont été utilisés comme "rêve", "question", "programme", "problème", "hypothèse" qui, sans être rigoureusement synonymes de conjecture cherchent à décrire ces créations, ces intuitions précédant la découverte scientifique achevée. Grothendieck disait que ses recherches sur les "motifs" n'était sûrement qu'un rêve puisqu'il ne démontrait rien; ce travail déboucha néanmoins sur la formulation de ce que Grothendieck a baptisé de façon optimiste les "conjectures standard". Le programme de Langlands n'a pas une formulation aussi précise et une bonne partie est décrite dans un article que l'auteur affuble de l'épithète *Ein Märchen*. Cantor pensait que l'énoncé suivant était vrai : tout ensemble infini de nombres réels a la puissance soit de l'ensemble des nombres réels, soit de l'ensemble des nombres entiers ; l'hypothèse du continu de Cantor a connu un destin singulier puisque les efforts pour la prouver on aboutit à la démonstration, par Gödel et Cohen, qu'elle était indécidable dans le système formel utilisé par les mathématiciens ; en particulier les efforts de Cantor étaient voués à l'échec. Le *jugendtraum* de Kronecker s'est vu confirmé par les travaux de Weber.

2 - Nature et rôle.

Quelle est donc la nature et le sens des conjectures? Que cherchent les mathématiciens? Qu'est-ce-qu'une "bonne" conjecture? On peut déjà trouver une question similaire dans le Ménon de Platon:

≪ *MÉNON : Et comment t'y prendras-tu, Socrate, pour chercher une chose dont tu ne connais pas du tout ce qu'elle est? Parmi les choses que tu ignores, laquelle te proposes-tu de chercher? A supposer même que, par une chance extraordinaire, tu tombes sur elle, comment sauras-tu que c'est elle, puisque tu ne l'as jamais connue?.* ≫

La réponse n'est pas aisée, celle de Platon - formulant sa célèbre théorie des *idées* , de la réminiscence - est très adaptée aux mathématiques, mais nécessite une sorte d'acte de foi. Popper, qui a par ailleurs donné une sombre vision de Platon, décrit la formation d'une hypothèse comme un exercice actif et créateur ; il critique à cet effet le point de vue qu'il juge réducteur de Hume. Popper pense même que nous ne pouvons pas savoir mais seulement conjecturer, que toute découverte scientifique contient un élément irrationnel ou

(1) Cette conjecture a été depuis démontrée par T. Hales.

une intuition créatrice. Il s'appuie en cela sur des propos d'Einstein sur la recherche de lois universelles d'où une description du monde peut être déduite mais auxquelles aucun chemin déductif ne nous mènerait. Cette composante d'intuition créatrice n'exclut pas, bien au contraire, le fait que la "testabilité" constitue la marque de la scientificité, des énoncés, des théories. Ces remarques générales sur les sciences s'appliquent bien entendu aux mathématiques à la nuance près que l'on attend pas seulement une confirmation par des tests, expériences, mais une démonstration. Poincaré nie la possibilité d'expérimenter sans idée préconçue; à l'impossibilité s'ajouterait d'ailleurs la stérilité. ≪ *Toute généralisation suppose dans une certaine mesure la croyance à l'unité et à la simplicité de la nature.*≫ On notera que ce point de vue se rapproche d'un point de vue platonicien sans lui être réductible. Poincaré ajoute que toute généralisation est une hypothèse, ce qui rend limpide la nécessité de l'hypothèse ou de la conjecture. Ainsi, loin d'être l'indice d'un certain obscurantisme ou d'un aveu d'impuissance, les conjectures sont précisément des signes de fécondité ; la "bonne" conjecture apparait non comme un pis-aller de la démonstration mais comme un élan vers la généralisation, un lieu d'expérimentation, un guide du sens, une recherche d'unité ou de perfection. Cette quête peut être très concrète comme par exemple la recherche de la meilleure inégalité possible ou plus abstraite comme la recherche du cadre le plus général possible. En ce sens la formulation de conjectures est une partie essentielle du processus de découverte scientifique. L'élaboration de systèmes formels, si elle constitue un apport scientifique indéniable tend à occulter le sens des mathématiques. Ce sens est beaucoup plus difficile à décrire qu'un système formel et fait nécessairement appel à des notions subjectives, de même que l'appellation de "bonne" conjecture. L'entrée dans le XXème siècle a été marquée, pour les mathématiques, par la conférence de Hilbert où celui-ci a présenté 23 problèmes ; il dit lui-même qu'il est souvent impossible de préjuger de la valeur d'un problème mais que c'est le profit qu'on tirera de la solution du problème qui permet de porter un jugement sur ce dernier. Terminons en citant un passage de son introduction aux problèmes futurs :

≪ *Tant qu'une branche de la Science jouit d'une abondance de problèmes, elle est pleine de vie ; le manque de problèmes dénote la mort ou la cessation du développement propre de cette branche et de même que dans toute entreprise humaine il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématique il faut des problèmes.*≫

BIBLIOGRAPHIE.

Riemann B., Sur le Nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1859, trad. fr. L. Laugel, in *Oeuvres de Riemann*, Gauthier-Villars, 1898. – Hilbert D., Problèmes futurs des mathématiques, in *Compte-rendu du deuxième congrès international des mathématiques* tenu à Paris du 6 au 12 août 1990, Gauthiers-Villars, 1902. – Poincaré H., *La Science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1918. – Popper K., *Logik der Forschung*, Vienne, 1934, trad. fr. N. Thyssen-Rutten et P. Devaux, *La Logique de la découverte*, Paris, Payot, 1973. – Weil A., *Oeuvres scientifiques*, Springer Verlag, 1979.

Marc HINDRY