Un corrigé de l'examen du 5 janvier 2012, "Courbes et surfaces"

(CS3, option L2 – Université Diderot Paris 7)

On donne des solutions plutôt "géométriques" et indique de temps en temps la solution "calculatoire".

Exercice 1 *On considère un morceau de ficelle de longueur L. Comment doit-on disposer la ficelle dans le quadrant supérieur droit du plan, en mettant une extrémité sur le demi-axe des $x > 0$ et l'autre extrémité sur le demi-axe des $y > 0$, de sorte que le domaine délimité par la ficelle et les axes de coordonnées soit d'aire maximale ? Quelle aire obtient-on ?*

Comme la corde C et les deux demi-axes délimitent un *domaine* D (d'*aire* A), on sait que C n'a qu'un seul point en commun avec le demi-axe $x > 0$ (l'une de ses extrémités, soit X) et un seul en commun avec le demi-axe $y > 0$ (l'autre extrémité, soit Y). Ceci découle de la définition d'un *domaine*. Et D est bordé par la réunion de C et des deux segments $u = [0, X]$ et $v = [0, Y]$.

Effectuant une symétrie σ_1 par rapport à l'axe des x, on trouve le domaine $D_1 = D \cup (\sigma_1 D)$, bordé par $C_1 = C \cup (\sigma_1 C)$ et par $v_1 = v \cup (\sigma_1 v)$. Effectuant une nouvelle symétrie σ_2 par rapport à l'axe des y, on obtient le domaine $D_2 = D_1 \cup (\sigma_2 D_1)$ d'aire $A_2 = 4A$, bordé par $C_2 = C_1 \cup (\sigma_2 C_1)$, de longueur $L_2 = 4L$. D'après l'inégalité isopérimétrique appliquée à D_2, on sait que l'on a $L_2^2 \geq 4\pi A_2$, c'est-à-dire que l'on doit avoir (pour notre problème) $L^2 \geq \pi A$. Cette inégalité est atteinte pour le quart de disque de rayon $2L/\pi$.

Exercice 2 *On définit une courbe plane paramétrée :*

$$M(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

a) Déterminer les points où le paramétrage est régulier.

b) Calculer la longueur de la courbe définie par $M : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$.

a) Le vecteur vitesse est $M'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$. Ce vecteur est de norme $\|M'(t)\| = \sqrt{2(1 - \cos t)}$ et il s'annule donc pour tous les $t = 2\,l\,\pi$ avec $l \in \mathbf{Z}$. La courbe $M(t)$ est régulière pour t distinct de ces valeurs.

b) La longueur à calculer est donnée par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \|M'(t)\|\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\; dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\; dt$$

puisque l'on a $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$, avec $\sin \frac{t}{2} > 0$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Posant $u = t/2$, on trouve que la longueur à calculer vaut

$$4 \int_0^{\pi} \sin u \; du = 4[-\cos u]_0^{\pi} = 8\ .$$

Exercice 3 *a) On se donne une courbe birégulière dont le rapport τ/κ est constant. Montrer que la tangente fait un angle constant avec une certaine droite fixe. [Indication : on pourra montrer que, sous les hypothèses, le vecteur $A(s) = \frac{\tau}{\kappa}T + B$ est constant, où s est le paramètre longueur.]*

b) On considère la courbe paramétrée donnée par

$$M(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t).$$

Vérifier que la courbe est birégulière puis calculer sa courbure et sa torsion. Montrer que la courbe fait un angle constant avec une direction que l'on déterminera.

a) Dérivons le vecteur $A(s) = \frac{\tau}{\kappa}T(s) + B(s)$, où le rapport (de la torsion à la courbure de la courbe) est constant, où s est la longueur d'arc, où $T(s)$ et $B(s)$ sont la tangente unitaire et la binormale du repère de Frenet de la courbe. D'après les formules classiques (et avec les conventions adoptées dans le cours) on trouve

$$A'(s) = \frac{\tau}{\kappa}T'(s) + B'(s) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\,\kappa(s)\,N(s) - \tau(s)\,N(s) = 0$$

où $N(s)$ est la normale (unitaire) principale à la courbe birégulière. Le vecteur $A(s) = A$ est donc bien constant et l'angle qu'il fait avec $T(s)$ est fixe, puisque l'on a $A \cdot T(s) = \frac{\tau}{\kappa}$ d'après la définition de $A(s)$.

b) Calculons d'abord les trois premières dérivées de $M(t)$. On a

$$M'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M''(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M'''(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On utilisera plus bas le fait que $\det(M'(t), M''(t), M'''(t)) = -2\sqrt{2}$.

On a $\|M'(t)\| = \sqrt{2\cosh(2t) + 2} = 2\cosh t = \frac{ds}{dt}$, où s est la longueur d'arc, d'où $T(t) = M'(t)/2\cosh t$. Le vecteur binormal $B(t)$ est le vecteur $M'(t) \wedge M''(t)$ divisé par sa norme $\|M'(t) \wedge M''(t)\|$. On a

$$M'(t) \wedge M''(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

qui est de norme $\|M'(t) \wedge M''(t)\| = 2\sqrt{2}\cosh t$. D'après une formule bien connue, donnée en cours et très utile ici (nous l'avons aussi vue et démontrée en td, on la trouve encore à l'exercice 15 du polycopié) on a donc

$$\kappa(t) = \frac{\|M'(t) \wedge M''(t)\|}{\|M'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}\cosh t}{2^3\cosh^3 t} = \frac{1}{2\sqrt{2}\cosh^2 t}.$$

D'après une autre formule du cours (également proposée en exercice en td, voir encore l'exo 16 du polycopié) on a

$$\tau(t) = \frac{\det(M'(t), M''(t), M'''(t))}{\|M'(t) \wedge M''(t)\|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2\cosh^2 t} = \frac{-1}{2\sqrt{2}\cosh^2 t}.$$

On voit que le rapport $\tau/\kappa = -1$ est constant, ce qui nous permet de dire, d'après le a), que T fait un angle constant avec le vecteur

$$A = \frac{\tau}{\kappa} T + B = \frac{-1}{2\cosh t} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\cosh t} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

qui est effectivement un vecteur fixe, puisque l'on trouve $A = (-1, 1, 0)$.

Exercice 4 *On étudie quelques propriétés de la surface S appelée hyperboloïde à une nappe dont l'équation dans l'espace de coordonnées x, y, z est*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

1. *Montrer que S peut être paramétrée par*

$$M(u, v) = (\operatorname{ch}(u)\cos v, \operatorname{ch}(u)\sin v, \operatorname{sh} u)$$

et calculer la normale $N = N_S$ et les deux formes fondamentales associées.

2. *Calculer la courbure de Gauss et vérifier qu'elle est négative ; calculer la courbure moyenne et vérifier qu'elle est de signe constant et ne s'annule que le long du cercle $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.*
3. *Montrer que la surface S est réglée, au sens où elle est couverte par les droites*

$$D_\alpha := \{(t\cos\alpha - \sin\alpha, t\sin\alpha + \cos\alpha, t) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

4. *Soit $L : [a, b] \to S \subset \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée tracée sur la surface S. On pose $m(t) = \frac{dt}{ds} = \|L'(t)\|^{-1}$ (Nota Bene : on ne suppose pas que la courbe $L(t)$ est paramétrée par sa longueur). Vérifier que*

$$T = m(t)L'(t), \quad \frac{d}{ds}T = m^2(t)L''(t) + mm'(t)L'(t)$$

et en déduire que la courbure géodésique peut s'exprimer par

$$\kappa_g = \det(N, T, T') = m^3(t)\det(N, L', L'').$$

5. *Calculer la courbure géodésique des courbes suivantes : les courbes $u = u_0$, les courbes $v = v_0$ et les courbes D_α. Parmi celles-ci lesquelles sont des géodésiques ?*
6. *Dessiner les courbes D_0, $D_{\pi/2}$ et les intersections de S avec les plans $z = 0$ et $z = 1$.*
7. *On considère la courbe C formée (dans l'ordre) par les quatre morceaux suivants :*
   (a) *l'arc de cercle C_1 découpé par $z = 0$ (dans $y \geq 0$) allant de $A_1 = (0, 1, 0)$ au point $A_2 = (-1, 0, 0)$;*
   (b) *le segment C_2 de $D_{\pi/2}$ joignant A_2 à $A_3 = (-1, 1, 1)$;*

(c) *l'arc de cercle C_3 découpé par $z = 1$ (dans $y \geq 0$) allant de A_3 au point $A_4 = (1, 1, 1)$;*

(d) *le segment C_4 de D_0 joignant A_4 à A_1.*

Écrire la formule de Gauss-Bonnet pour C.

8. *Calculer les angles aux sommets A_i ainsi que l'intégrale de la courbure géodésique sur chaque courbe C_i ; en déduire la valeur de l'intégrale de la courbure de Gauss sur la surface délimitée.*

1) Observons que, de même que le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est paramétré par $(x, y) = (\cos v, \sin v)$, la branche $\mathcal{H}$ de l'hyperbole $x^2 - z^2 = 1$ qui passe par le point $(0, 1)$ est paramétrée (de plus, il s'agit ici d'un paramétrage bijectif) par $(x, z) = (\cosh u, \sinh u)$ pour $u \in]-\infty, \infty[$, d'où certainement le nom de ces fonctions. En effet, d'une part l'identité $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ assure que l'image de cette courbe vérifie bien l'équation $x^2 - z^2 = 1$, d'autre part la branche d'hyperbole en question est le graphe de la fonction $f(z) = x = \sqrt{1+z^2}$ et, de plus, $z = \sinh u$ est une fonction impaire qui croît de $-\infty$ à $+\infty$ et décrit complètement l'axe des z. On passe de tout point de la courbe $\mathcal{H}$ à un point de la surface S d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en effectuant une rotation d'axe l'axe vertical passant par 0 et d'angle v, pour v (défini modulo 2π) par $\cos v = x/\sqrt{1+z^2}$ et $\sin v = y/\sqrt{1+z^2}$. On pouvait aussi vérifier directement

$$(\operatorname{ch} u \cos v)^2 + (\operatorname{ch} u \sin v)^2 - (shu)^2 = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1,$$

et, inversement, si on part de (x, y, z) sur la surface trouver u tel que $\operatorname{ch}(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\operatorname{sh} u = z$ puis v tel que $\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Voici les dérivées premières du paramétrage M

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial u} = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ \cosh u \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire les coefficients de la *première forme fondamentale*

$$E = \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \cosh^2 u \, , \; F = \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = 0 \, , \; G = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = \cosh^2 u + \sinh^2 u \, ,$$

et l'on a

$$\mathbf{I} = (\cosh^2 u) \, dv^2 + (\cosh^2 u + \sinh^2 u) \, du^2 \, .$$

La *normale* à la surface $N = N_S$ est donc

$$N = \frac{(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, -\sinh u)}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} \, .$$

Observons que le long du parallèle $u = 0$ elle se confond avec le rayon vecteur $(\cos v, \sin v, 0)$.

Et maintenant, voici les dérivées secondes du paramétrage M

$$\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} = -\begin{pmatrix} \cosh u \, \cos v \\ \cosh u \, \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial u \, \partial v} = \begin{pmatrix} -\sinh u \, \sin v \\ \sinh u \, \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} \cosh u \, \cos v \\ \cosh u \, \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix},$$

d'où l'on calcule les coefficients de la *deuxième forme fondamentale*

$$e = \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \cdot N = \frac{-\cosh^2 u}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} \quad , \quad g = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \cdot N = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} ,$$

$$f = \frac{\partial^2 M}{\partial u \, \partial v} \cdot N = 0 ,$$

et l'on obtient

$$\mathbf{II} = \frac{-\cosh^2 u}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} dv^2 + \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} du^2 .$$

2) Le calcul de la *courbure de Gauss* K est immédiat

$$K = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} = \frac{-1}{(\cosh^2 u + \sinh^2 u)^2} .$$

Le signe de la *courbure moyenne* conduit à donner la matrice (dans la base $\frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}$) de l'*opérateur symétrique* A qui écrit $\mathbf{II}$ dans $\mathbf{I}$, donc la matrice produit

$$\begin{pmatrix} \frac{-\cosh^2 u}{(\cosh^2 u + \sinh^2 u)^{1/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\cosh^2 u + \sinh^2 u)^{1/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u + \sinh^2 u} \end{pmatrix} .$$

L'opérateur A a pour matrice dans la base choisie

$$\frac{1}{(\cosh^2 u + \sinh^2 u)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\cosh^2 u - \sinh^2 u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et, comme la trace de cette matrice est négative ou nulle (car $1 - \cosh^2 u - \sinh^2 u = -2 \sinh^2 u$), avec nos conventions et notre choix de normale, la courbure moyenne est toujours négative ou nulle, elle s'annule là où $\sinh u = 0$, c'est-à-dire pour $u = 0$ qui est le cercle des points $x^2 + y^2 = 1$ et $z = 0$.

On pouvait bien sûr utiliser directement la formule (Cf cours page 27 et TD) donnant $H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$, ce qui donne ici

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = -\frac{\mathrm{sh}^2 u}{(\mathrm{ch}^2 u + \mathrm{sh}^2 u)^{3/2}}.$$

3) Considérons l'intersection de S avec le plan $y = 1$. On voit qu'il s'agit des points qui sont aussi solutions de l'équation $x^2 - z^2 = 0$, c'est-à-dire de la réunion des deux droites D_0 d'équations $x = z$ et $y = 1$ et D_0^- d'équations $x = -z$ et $y = 1$. On a vu au 1) que la surface S s'obtient par révolution de la

courbe $\mathcal{H}$ autour de l'axe vertical. Comme tout point de $D_0 = \{(t,1,t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ est l'image d'un point et d'un seul de $\mathcal{H}$ par une rotation autour de l'axe vertical d'angle β vérifiant $\cos\beta = t/\sqrt{1+t^2}$ et $\sin\beta = -1/\sqrt{1+t^2}$, le résultat est vrai. Un calcul direct montre qu'en effectuant une rotation d'angle α et d'axe vertical on envoie D_0 sur D_α.

On pouvait aussi vérifier directement que D_α est contenue dans la surface puis observer que

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D_0 = D_\alpha$$

pour conclure.

4) Par définition, le vecteur $T(t)$ est la tangente unitaire à $L(t)$, on a donc $T(t) = L'(t)/\|L'(t)\| = m(t)\,L'(t)$ et $dt/ds\,(t) = (ds/dt)^{-1}(t) = m(t)$ (ici L' désigne la dérivée de L par rapport à t). On en tire

$$\frac{dT}{ds}(t) = \frac{dT}{dt}(t)\frac{dt}{ds}(t) = ((m'L' + mL'')m)(t) = m(t)m'(t)L'(t) + m^2(t)L''(t)\ .$$

Le *vecteur courbure* k_L de la courbe L est égal par définition à $\frac{dT}{ds}$. Le *vecteur courbure normale* k_L^n est la projection orthogonale de k_L sur la droite normale à la surface, de direction choisie N, enfin le *vecteur courbure géodésique* k_L^g est le projeté orthogonal de k_L sur le plan tangent à la surface, il est donc colinéaire à $N \wedge T$, qui est un vecteur unitaire. La *courbure géodésique* est *égale* au produit scalaire (mixte) $N \wedge T \cdot k_L = \det(N, T, \frac{dT}{ds}) = m^3 \det(N, L', L'')$, la dernière égalité résultant des égalités établies au début de la solution de cette question (*égale* : pourquoi ne pas choisir ici la convention inverse et définir la courbure géodésique par $-\det(N, T, \frac{dT}{ds})$? *Notre convention s'accorde avec celles faites dans l'énoncé du théorème de Gauss-Bonnet donné dans le cours*, qui intervient plus bas ; à noter ici une "ambiguïté" dans l'énoncé du problème, il aurait mieux valu écrire $\det(N, T, \frac{dT}{ds})$ plutôt que $\det(N, T, T')$, qui pouvait renvoyer à la dérivée en t).

5) Le calcul des courbures de D_0 et $D_{\pi/2}$ se résume à peu de choses, puisque ces courbes sont des droites (de courbures nulles, dans tous les sens du terme). Le calcul de la courbure géodésique de la courbe $v = v_0$ est facilité par l'observation que cette courbe est tracée dans un plan perpendiculaire à la surface (orthogonal en tout point d'intersection au plan tangent à la surface) : c'est le propre de toutes les surfaces de révolution autour de l'axe vertical passant par 0. La courbure normale de la courbe $v = v_0$ ("méridien" de S) coïncide donc avec la courbure de la courbe (dans l'espace) et la courbure géodésique est encore nulle. Il en est encore de même pour le "parallèle" $u = 0$, car le plan $z = 0$ rencontre perpendiculairement S.

Utilisons pour finir la formule établie à la question précédente. Le vecteur vitesse L' d'un parallèle $L = (\cosh u_0 \cos v, \cosh u_0 \sin v, \sinh u_0)$ déterminé par $u = u_0$ est le vecteur $\cosh u_0(-\sin v, \cos v)$ et $L'' = \cosh u_0(-\cos v, -\sin v)$. La courbure géodésique est donc constante et vaut

$$\kappa = \det(N, L', L'') = \frac{-\tanh u_0}{\sqrt{\cosh^2 u_0 + \sinh^2 u_0}} \, .$$

6) VOIR le dessin à la fin du corrigé.

7) La formule de Gauss-Bonnet s'écrit, en accord avec l'orientation de S donnée par la normale N et le sens de parcours choisi sur C

$$\int_\Delta K \; d\,\text{aire} + \int_C \kappa \; ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{4} \theta_i \; ,$$

où les θ_i sont les angles extérieurs aux sommets du domaine Δ bordé par C et où $d\,\text{aire} = \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u} \; dv \, du$ et ds est l'élément de longueur de C. L'intégrale de la courbure de Gauss sur le domaine orienté Δ s'écrit

$$\int_\Delta K \; d\,\text{aire} = -\int_\Delta (\cosh^2 u + \sinh^2 u)^{-3/2} \; dv \, du \; .$$

8) D'après le dessin, l'angle θ_1 vaut $\pi/4$ tandis que θ_2 vaut $\pi - \pi/4$ et $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Cette compensation (avec un angle γ qui n'est plus $\pi/4$) se produit encore pour les angles θ_3 et θ_4 : on le vérifie en effectuant sur la figure une rotation d'axe vertical passant par 0 et d'angle $\pi/2$. On a donc l'égalité $\sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi$.

La courbure géodésique est nulle sur tous les arcs, sauf sur celui de longueur $\pi/\sqrt{2}$ qui joint A_3 à A_4 où elle vaut $+\tanh u_0/\sqrt{\cosh^2 u_0 + \sinh^2 u_0} = 1/\sqrt{6}$: il s'agit du parallèle $u_0 = \arg\sinh 1$ parcouru dans le sens des v *décroissants*, en outre $\cosh(\arg\sinh r) = \sqrt{\sinh^2(\arg\sinh r) + 1} = \sqrt{r^2+1}$. On a

$$\int_C \kappa \; ds = \frac{\text{long}\, C}{\sqrt{6}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

D'où, par la formule de Gauss-Bonnet qui se réduit ici è

$$-\int_\Delta K \; d\,\text{aire} = \int_C \kappa \; ds \; ,$$

on trouve l'égalité

$$\int_\Delta \frac{dv \, du}{(\cosh^2 u + \sinh^2 u)^{3/2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \, .$$

Observons pour finir que l'on peut calculer un peu plus facilement $\int_\Delta K \; d\,\text{aire}$ en remarquant que le domaine compris entre les parallèles $u = 0$ et $u = u_0 = \arg\sinh 1$ s'obtient en réunissant le domaine Δ avec ses images par les rotations d'axe vertical passant par 0 et d'angles $\pi/2$, π et $3\pi/2$. Alors, à l'aide du changement de variables $w = \cosh 2u$, on peut encore exprimer cette intégrale ainsi

$$\int_\Delta K \; d\,\text{aire} = \frac{\pi}{4} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dw}{w\sqrt{w\,(w^2-1)}} \, .$$

Il s'agit d'une *intégrale elliptique* dite *du troisième type*, voir la littérature.

(Dessin de la question 6)

Le domaine Δ est le morceau de la surface S, d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ qui est bordé par la courbe C