Courbes et surfaces

15 décembre 2010

Marc Hindry (cours), Nabil Kahouadji (exercices) : courbes et surfaces, L2 option Math, Université Paris VII

[Ceci est un RÉSUMÉ des premiers chapitres "*Courbes dans le plan et l'espace*" et "*inégalité isopérimétrique*" puis "*Surfaces dans l'espace*" ; dans le futur il y aura un peu plus d'exercices et surtout ...des dessins ! !]

Table des matières

1 Préliminaires et rappels

1.1 Plan et espace euclidien

Le plan, l'espace et plus généralement l'espace $E = \mathbf{R}^n$ de dimension n est muni d'un *produit scalaire*, d'une *norme euclidienne* et d'une *distance euclidienne.* Si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ alors :

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1} x_i^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{dist}(X,Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1} (x_i - y_i)^2} \tag{1}$$

Proposition 1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \, \|Y\|. \tag{2}$$

De plus, on a égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Corollaire 1 *(Inégalité triangulaire)*

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|; \quad \mathrm{dist}(X,Y) \leq \mathrm{dist}(X,Z) + \mathrm{dist}(Z,Y).$$

On dispose également de la notion d'orientation que, pour simplifier , nous ne définissons que dans $\mathbf{R}^n$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, alors tout vecteur X de $\mathbf{R}^n$ s'écrit comme un vecteur colonne (ou ligne suivant les conventions) de coordonnées x_1, x_2,..., x_n, c'est-à-dire $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 \cdots + x_n e_n$. Si $\mathcal{B} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une autre base, alors le *déterminant* $\det(e'_1, \ldots, e'_n)$ est un réel non nul.

Définition On dit que $\mathcal{B} = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une base *directe* (resp. une base *indirecte*) si $\det(e'_1, \ldots, e'_n) > 0$ (resp. si $\det(e'_1, \ldots, e'_n) < 0$).

Définition Une *isométrie* d'un espace euclidien est une application qui préserve les distances, i.e. une application $f : E \to E$ telle que pour tout $X, Y \in E$ on ait

$$\mathrm{dist}(f(X), f(Y)) = \mathrm{dist}(X,Y). \tag{3}$$

Une isométrie *linéaire* est une isométrie telle que $f(0) = 0$.

Le nom donné dans cette dernière définition est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 2 *Soit $f : E \to E$ une isométrie. Posons $X_0 = f(0)$ et $f_0(X) = f(X) - X_0$, alors f_0 est une application linéaire et bien sûr une isométrie. Ainsi toute isométrie est composée d'une isométrie linéaire et d'une translation. De plus une application linéaire est une isométrie si et seulement si elle préserve la norme ou si et seulement si elle préserve le produit scalaire ou encore si et seulement si elle transforme la base canonique en une base orthonormée .*

Exemple 1 Considérons le plan $E = \mathbf{R}^2$. La rotation d'angle θ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est une isométrie linéaire directe (son déterminant est égal à $+1$). Les autres isométries sont des symétries orthogonales par rapport à une droite dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ce sont des isométries linéaires indirectes (leur déterminant est égal à -1).

Remarque 1 Soit A la matrice dans la base canonique d'une application linéaire $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, alors f est une isométrie si et seulement si ${}^tAA = A{}^tA = Id$. On en tire en particulier $1 = \det({}^tAA) = (\det A)^2$ donc $\det A = \pm 1$. L'isométrie est directe (resp. indirecte) si $\det A = 1$ (resp. $\det A = -1$).

Définition Soit U un vecteur unitaire du plan, on appellera vecteur normal le vecteur unitaire V obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$; en formule si $U = (a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$ alors $V = (-b, a) = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}))$.

Remarquons que la paire U, V dans la définition précédente est telle qu'elle forme une base orthonormée directe.

Définissons maintenant le *produit vectoriel* de deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ (appelé parfois *produit extérieur*).

Définition Soit U, V deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$, le vecteur $U \wedge V$ est l'unique vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que, pour tout $W \in \mathbf{R}^3$, on a :

$$\det(U, V, W) = W \cdot (U \wedge V). \tag{4}$$

Théorème 1 *Le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Le produit est linéaire en chaque variable et $U \wedge V = -V \wedge U$. En particulier $U \wedge U = 0$.*
2. *Si U (resp. V) a pour coordonnées u_1, u_2, u_3 (resp. v_1, v_2, v_3) alors*

$$U \wedge V = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

3. *Le vecteur $U \wedge V$ est orthogonal à U et V.*
4. *Si U et V sont unitaires et orthogonaux alors $\{U, V, U \wedge V\}$ forme une base orthonormée directe.*
5. *Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est l'angle entre les deux vecteurs U, V alors*

$$\|U \wedge V\| == \det \begin{pmatrix} \|u\|^2 & u \cdot v \\ u \cdot v & \|v\|^2 \end{pmatrix} = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 = \sin\theta \, \|U\| \, \|V\|.$$

Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique.

Lemme 1 *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire tel que*

$$f(X) \cdot Y = X \cdot f(Y).$$

Alors il existe une base orthornormé dans laquelle f est diagonale, c'est-à-dire une base $e_1, \ldots, e_n$ et des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f(e_i) = a_i e_i$. Si de plus on a, pour $X \neq 0$, l'inégalité $f(X) \cdot X > 0$, alors on aura $a_i > 0$.

Lemme 2 *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un endomorphisme symétrique. Posons*

$$a_1 = \min_{X \neq 0} \frac{f(X) \cdot X}{\|X\|^2} \qquad \text{et} \qquad a_2 = \max_{X \neq 0} \frac{f(X) \cdot X}{\|X\|^2}$$

Alors il existe une base orthornormé e_1, e_2 dans laquelle f est diagonale et telle que $f(e_i) = a_i e_i$. Si l'on écrit $X = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ un vecteur unitaire du plan, on a alors

$$f(X) = a_1 \cos^2\theta + a_2 \sin^2\theta.$$

Dans une base (non nécessairement orthogonale) la matrice de l'endomorphisme f du lemme s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; elle n'est pas en général symétrique mais on peut retrouver les valeurs propres a_1 et a_2 par les formules

$$a_1 a_2 = \det(f) = ad - bc \qquad \text{et} \qquad a_1 + a_2 = \mathrm{Tr}(f) = a + d.$$

1.2 Calcul différentiel

Passons maintenant à quelques rappels de calcul différentiel. On notera $\mathcal{C}^k$ la classe des fonctions qui sont k fois continûment dérivables.

Proposition 3 *Soit f, g deux fonctions dérivables*

1. $(f+g)' = f' + g'$ *et* $(fg)' = fg' + f'g$.
2. $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$.
3. *Soit f une bijection et g sa bijection réciproque. La fonction g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et dans ce cas $g'(y_0) = f'(x_0)^{-1}$.*

Les mêmes règles de calculs s'appliquent aux dérivées successives ; par exemple $(f \circ g)''(x) = g''(x) f'(g(x)) + g'(x)^2 f''(g(x))$. Lorsque la fonction est suffisamment dérivable on dispose de la formule de Taylor dont une des formes est décrite ainsi :

$$f(t+h) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!} h + \frac{f''(t)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} h^n + o(h^n).$$

Les fonctions "idéales" sont les fonctions *analytiques*, i.e. les fonctions qui coïncident avec leur développement ou série de Taylor, i.e. qui vérifient (pour h dans un intervalle $]-r,r[$ convenable) :

$$f(t+h) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}h + \frac{f''(t)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}h^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{n!}h^n.$$

La dérivation d'une fonction vectorielle est simple à définir, on pose, si $M(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, alors par définition $M'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$. La règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit se propage à toute fonction bilinéaire. On a par exemple :

$$(M(t) \cdot K(t))' = M'(t) \cdot K(t) + M(t) \cdot K'(t) \quad \text{et} \quad (M(t) \wedge K(t))' = M'(t) \wedge K(t) + M(t) \wedge K'(t)$$

Ceci est particulièrement utile dans les deux cas suivants :

1. Si $M(t)$ est un vecteur unitaire (pour tout t) alors $M'(t)$ est orthogonal à $M(t)$; en effet $M(t) \cdot M(t) = 1$ implique $2M(t) \cdot M'(t) = 0$.
2. Si $M(t)$ est orthogonal à $N(t)$ (pour tout t) alors $M(t) \cdot N'(t) = -M'(t) \cdot N(t)$; en effet $M(t) \cdot N(t) = 0$ implique $M'(t) \cdot N(t) + M(t) \cdot N'(t) = 0$.

Une surface dans $\mathbf{R}^3$ peut être définie par une équation $f(x,y,z) = 0$ ou par des paramétrisations $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$; dans les deux cas on aura besoin du calcul différentiel en plusieurs variables.

Définition 1 Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, on dit que f est *différentiable* au point x_0 s'il existe une application linéaire $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ telle que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|),$$

où $o(\|h\|)$ désigne un vecteur de $\mathbf{R}^m$ de norme $o(\|h\|)$.

On note $Df(x_0)$ l'application linéaire ainsi définie et on l'appelle la différentielle de f en x_0 ; on a donc, lorsque f est différentiable :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h + o(\|h\|) \tag{5}$$

Si l'on écrit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et introduit les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{h}, \tag{6}$$

l'application linéaire $Df(x_0)$ a pour matrice dans la base canonique la matrice de coefficients $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$. On définit naturellement les dérivées d'ordre supérieur et l'on a l'important résultat suivant.

Théorème 2 *(Schwarz) Supposons la fonction f deux fois continûment dérivable alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0). \tag{7}$$

Théorème 3 *(Dérivation composée) Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ et $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^\ell$ deux applications différentiables alors $g \circ f$ est différentiable et :*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0). \tag{8}$$

Théorème 4 *(Formule de Taylor) Soit f une fonction deux fois continûment différentiable, notons $D^2 f(x)$ la forme bilinéaire définie par la matrice de coefficients $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, on a alors*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!} Df(x)(h) + \frac{1}{2!} D^2 f(x)(h,h) + o(\|h\|^2). \tag{9}$$

Il s'agit de la formule de Taylor à l'ordre deux ; l'écriture avec 1! et 2! au lieu de 1 et 2 est justement choisie pour suggérer la formule de Taylor à un ordre quelconque

2 Courbes paramétrées

2.1 Définitions et exemples

On peut définir de deux manières (au moins) une courbe dans le plan : en la paramétrant $M(t) = (x(t), y(t))$ avec donc $M : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ ou par une équation $f(x,y) = 0$. Dans le premier cas le vecteur tangent $M'(t) = (x'(t), y'(t))$ définit une droite – et même une droite orientée – si et seulement si $M'(t) \neq (0,0)$; dans le deuxième cas la droite tangente en $P = (x_0, y_0)$ est définie par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0. \tag{10}$$

On voit tout de suite que ceci définit bien une droite tangente (non orientée) si et seulement si l'une des deux dérivées partielles est non nulle, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2 Un point *singulier* d'une courbe paramétrée $M : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ est un point où $M'(t_0) = 0$; un point singulier d'une courbe $f(x,y) = 0$ est un point où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

Observons brièvement l'effet d'un changement de paramétrisation. Si $M(t)$ définit une courbe paramétrée $[a,b] \to \mathbf{R}^2$, soit $f : [c,d] \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$ alors $M_1(u) := M(f(u))$ définit une “nouvelle” courbe paramétrée ; c'est en fait la “même” courbe parcourue à une vitesse différente (et éventuellement en sens inverse). Pour les dérivées on a par exemple $M_1'(u) = f'(u)M'(f(u))$ et $M_1''(u) = f''(u)M'(f(u)) + f'(u)^2 M''(f(u))$.

Il existe une paramétrisation “meilleure” que les autres, au moins du point de vue théorique, c'est la paramétrisation par la longueur.

Définition. Pour mesurer la longueur d'une courbe paramétrée il est naturel de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n parties $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ et d'introduire la longueur de la ligne polygonale :

$$L(a_0, \ldots, a_n) := \sum_{i=1}^{n} \|M(a_{i+1} - M(a_i)\|.$$

On appellera *pas* de la subdivision la quantité $\delta = \max_i(a_{i+1} - a_i)$. On dit que la courbe $M : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ est *rectifiable* si la limite suivante, que l'on appellera *longueur* de la courbe, existe :

$$L := \lim_{\delta \to 0} L(a_0, \ldots, a_n) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|M(a_{i+1} - M(a_i)\|.$$

Théorème 5 *Soit $M : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ (ou même de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), alors la courbe est rectifiable et sa longueur est égale à :*

$$L = \int_a^b \|M'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t)} dt. \tag{11}$$

Définition. Une courbe paramétrée $M : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ est *régulière* en t_0 si M est dérivable en t_0 et $M'(t_0) \neq 0$. Plus généralement, une courbe paramétrée $M : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ est *k-régulière* en t_0 si M est k fois dérivable en t_0 et les vecteurs $M'(t_0)$, $M''(t_0) \ldots M^{(k)}(t_0)$ sont linéairement indépendants.

Remarque. Bien sûr une courbe ne peut être k-régulière que si $k \leq n$. Nous utiliserons seulement les notions de *régulière* et *bi-régulière*.

Soit une courbe paramétrée $M : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et régulière, de longueur ℓ, on peut la reparamétriser par sa longueur ainsi. L'application $s(t) = \int_a^t \|M'(u)\| du$ définit une bijection croissante $[a, b] \to [0, \ell]$ dont la dérivée $s'(t) = \|M'(t)\|$ est strictement positive (c'est ici que l'hypothèse régulière est utilisée). On peut donc inverser cette fonction et obtenir une fonction dérivable $t = g(s)$ telle que $g'(s) = 1/s'(t)$. Si on pose $M_1 = M \circ g : [0, \ell] \to \mathbf{R}^n$ alors

$$M_1'(s) = g's)M'(g(s)) = \frac{M'(t)}{s'(t)} == \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|}.$$

Ainsi $M'(s)$ est unitaire, ce qu'on peut interpréter en disant que la courbe est parcourue avec une vitesse constante égale à 1.

Définition. On dit que $M : [0, \ell] \to \mathbf{R}^n$ est *paramétrisée par sa longueur* si $\|M'(s)\| = 1$. Dans ce cas la longueur de l'arc paramétrisé par $[0, s]$ est égale à s.

2.2 Exercices

Exercice 1 *Soit le plan cartésien de coordonnées x et y. Pour chacune des figures géométriques suivantes, rappeler l'équation cartésienne, donner une représentation paramétrique.*

1. *Une droite dans le plan.*
2. *Cercle de centre $M(a, b)$ et de centre r.*

Ces figures géométriques sont-elles le graphe d'une fonction scalaire ?

Exercice 2 *Reconnaître les courbes définies par leurs équations paramétriques $t \longrightarrow (x(t), y(t))$ et en donner une équation cartésienne (i.e. de la forme $f(x, y) = 0$) :*

1. $x(t) = at + a; \quad y(t) = bt + b.$ *avec a et b des nombres réels.*
2. $x(t) = t; \quad y(t) = t^2 + 1.$
3. $x(t) = a \cos t; \quad y(t) = b \sin t$ *avec a et b des réels strictement positifs.*
4. $x(t) = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \quad y(t) = b\dfrac{2t}{1+t^2}$ *avec a et b des réels strictement positifs.*
5. $x(t) = t^2 - 1; \quad y(t) = t(t^2 - 1).$

Exercice 3 *À partir de la définition paramétrique des courbes C_1, C_2, C_3 et C_4, tracer leur graphique :*

$$C_1 : t \longmapsto (t, 1-t), \quad C_2 : t \longmapsto (1-t^2, t^2), \quad C_3 : t \longmapsto (\cos^2 t, \sin^2 t),$$

$$\text{pour } t > 0, C_4 : t \longmapsto (\ln t - t, 1 + t - \ln t).$$

Exercice 4 *Soit la courbe C de paramétrisation $x = t^3 - 3t; \quad y = t^2 - 5t - 1.$*

1. *Trouver une équation de la tangente à C, au point correspondant à $t = 2$.*
2. *Pour quelles valeurs de t la tangente est-elle horizontale ou verticale ?*
3. *Étudier et tracer cette courbe.*

Exercice 5 ***(L'hyperbole).***

Soit la courbe plane $t \longrightarrow \left(t + \dfrac{1}{t}, t - \dfrac{1}{t}\right)$ pour $t > 0$.

1. *Par un changement de paramètre, montrer que cette courbe se transforme en $s \longrightarrow \Big(2\cosh(s), 2\sinh(s)\Big)$.*
2. *En déduire son équation cartésienne.*
3. *Étudier et tracer cette courbe.*

Exercice 6 ***(Étude de la Cycloïde)*** *On considère la courbe engendré par la valve V (assimilé à un point) d'un pneu de bicyclette lorsque la roue (assimilé à un cercle) roule sans glisser et en ligne droite sur une surface plane. La figure ci-dessous montre à différent instants la position de la valve, ainsi que la courbe C qu'elle engendre. Cette courbe s'appelle : une cycloïde. Pour simplifier la situation, on choisi de donner à la roue un rayon égal à une unité de longueur.*

1. *Déterminer une paramétrisation de C.*
2. *Montrer que la cycloïde est périodique de période T. En donnera la valeur de T.*
3. *Déterminer la paramétrisation d'une trajectoire d'un point à l'intérieur de la roue (le bout de la valve). Même question pour un point à l'extérieur de la roue (on peut imaginer que ce point est lié à la roue par une tige métallique et que le roulement de la roue est possible).*

Exercice 7 ***(Astroïde)*** *Déterminer la longueur de l'astroïde définie par :*

$$[0, 2\pi] \ni \theta \longrightarrow (R\cos^3 t, R\sin^3 t), \qquad R \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 8 ***(Cycloïde)*** *Déterminer la longueur d'un arc de cycloïde définie par :*

$$\theta \longrightarrow \Big(R(\theta - \sin\theta), R(1 - \cos\theta)\Big)$$

Exercice 9 ***(L'hypocycloïde).*** *Soit γ un cercle de rayon r que l'on fait rouler (sans glissement) à l'intérieur d'un cercle Γ de rayon R. On fixe un point M du cercle mobile. Il décrit dans le mouvement une courbe. On prend comme paramètre l'angle polaire $\theta \in \mathbb{R}$, du point de contact $H(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ du cercle γ avec le cercle Γ. On suppose que $M(0) = H(0) = (R, 0)$.*

1. *Calculer les coordonnées du centre $I(\theta)$ de γ au temps θ.*
2. *Trouver l'angle $M(\theta)\widehat{I(\theta)}H(\theta)$.*
3. *Trouver les coordonnées de $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$.*
4. *Posons $R = 1$ et $r = 1/n$. Quelle est la courbe décrite par le point M lorsque $n = 2$, $n = 3$?*
5. *Montrer que pour $r = 1/4$ et $R = 1$, la courbe ainsi décrite par le point M est l'astroïde définie dans l'exercice 7.*
6. *Supposons que $R = 1$ et $r < 1$ est irrationnel. Que peut-on dire de la courbe décrite par le point M ?*

Exercice 10 *À l'aide d'une intégrale, exprimer la longueur de :*

1. *L'ellipse, paramétrée par $t \longrightarrow (a\cos t, b\sin t)$.*
2. *La lemniscate de Bernouilli, paramétrée par $t \longrightarrow \left(\sqrt{2}\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}, \sqrt{2}\dfrac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}\right)$.*

3 Courbes dans le plan

3.1 Courbure

Commençons par étudier le cas d'une courbe paramétrée par sa longueur $s \mapsto M(s)$.

Dans ce cas $T(s) := M'(s)$ est un vecteur unitaire ; on définit $N(s)$ comme le vecteur *normal* obtenu par rotation d'angle $\pi/2$ à partir de $T(s)$. En formule, si $T(s) = (a, b)$, on pose $N(s) = (-b, a)$.

Comme $T(s) \cdot T(s) = 1$ on constate que $2T(s) \cdot T'(s) = 0$ et donc que $T'(s)$ est proportionnel à $N(s)$, ce qui justifie la définition suivante.

Définition. La *courbure* $\kappa(s)$ d'une courbe paramétrée par sa longueur est définie par l'équation :

$$T'(s) = \kappa(s)N(s). \tag{12}$$

Si $M(t)$ définit une courbe paramétrée régulière, sa courbure est naturellement définie comme la courbure de la courbe reparamétrée par sa longueur, c'est-à-dire que si $s(t) = \int_a^t \|M'(u)\| du$ et $M(t) = M_1(s(t))$ on pose $\kappa(t) = \kappa_1(s(t))$.

Remarque. La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit deux fois dérivable, ensuite que la courbe soit régulière au point où l'on veut définir la courbure (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire).

Remarquons que si l'on écrit $N' = aT + bN$, on en tire $b = N \cdot N' = 0$ et $a = T. \cdot N' = -T' \cdot N = -\kappa$ d'où

$$T' = \kappa N \qquad \text{et} \qquad N' = -\kappa T. \tag{13}$$

On démontrera à titre d'exercice les formules suivantes pour une paramétrisation quelconque $M(t) = (x(t), y(t)$:

$$T(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|}.$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(M'(t), M''(t))}{\|M'(t)\|^3}.$$

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Proposition 4 *Soit C_1 et C_2 deux courbes paramétrées ayant même fonction courbure $\kappa(s)$. Alors il existe une isométrie (directe) σ telle que $\sigma(C_1) = C_2$.*

Preuve. Nous allons donner deux preuves, l'une naturelle mais valable seulement lorsque la courbe est analytique, l'autre astucieuse mais valable dans le cas général.

Commençons par exprimer les dérivées successives dans la base T, N ; on obtient

$$M'(s) = T,\ M''(s) = \kappa N,\ M^{(3)} = -\kappa^2 T + \kappa' N,\ M^{(4)} = 3\kappa\kappa' T + (\kappa^3 + \kappa'')N,\ ETC.$$

On montre alors aisément par récurrence que $M^{(n)}(t)$ s'exprime dans la base T, N avec des coordonnées fonctions (polynomiales) en les dérivées successives de $\kappa(s)$. On en tire des formules du type :

$$M^{(n)}(0) = f_n(\kappa(0), \dots, \kappa^{(n-2)}(0))T(0) + g_n(\kappa(0), \dots, \kappa^{(n-2)}(0))N(0).$$

Si $M(t)$ est analytique, elle est égale (sur un intervalle convenable) à sa série de Taylor

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}.$$

La courbure est également analytique $\kappa(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$. Ainsi $M(t)$ est entièrement déterminée par sa courbure (ou encore par ses dérivées successives $\kappa^{(n)}(0)$), sa valeur initiale $M(0)$ et $T(0)$.

Si l'on ne suppose plus $M(s)$ analytique, on peut procéder ainsi. On considère deux courbes $M_1(s)$, $M_2(s)$ ayant la même fonction courbure $\kappa(s)$. Après transformation de $M_2(t)$ par une isométrie directe (translation et rotation) on peut supposer $M_1(0) = M_2(0)$ et $T_1(0) = T_2(0)$ (donc $N_1(0) = N_2(0)$). Considérons alors la fonction $f(s) = T_1(s) \cdot T_2(s) + N_1(s) \cdot N_2(s)$. En calculant la dérivée :

$$f's) = T_1'(s) \cdot T_2(s) + T_1(s) \cdot T_2'(s) + N_1'(s) \cdot N_2(s) + N_1(s) \cdot N_2'(s)$$

$$= \kappa N_1(s) \cdot T_2(s) + \kappa T_1(s) \cdot N_2(s) - \kappa T_1(s) \cdot N_2(s) - \kappa N_1(s) \cdot T_2(s) = 0,$$

et en observant que $f(0) = 2$ on voit que $f(s) = 2$. Cependant, d'après l'inégalité (2) Cauchy-Schwarz, $T_1(s) \cdot T_2(s) \leq 1$ avec égalité si et seulement si $T_1(s) = T_2(s)$ (idem pour $N_1(s) \cdot N_2(s)$). On obtient donc $T_1(s) = T_2(s)$, c'est-à-dire $M_1'(s) = M_2'(s)$ et comme $M_1(0) = M_2(0)$ on en tire l'énoncé voulu.

Donnons maintenant une autre interprétation de la courbure : c'est la variation de l'angle défini par la tangente. Le vecteur tangent unitaire peut être décrit par un angle, $T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$; on a alors

$$T'(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = -\theta'(s)N(s)$$

d'où la formule

$$\kappa(s) = \theta'(s). \tag{14}$$

Théorème 6 *Soit $g(s)$ une fonction continue, il existe une courbe (unique à isométrie près) telle que $\kappa(s) = g(s)$.*

Preuve L'unicité est déjà prouvée plus haut. Pour démontrer l'existence, il suffit de construire une primitive $\theta(s) = \int g(s)ds$ puis d'extraire une nouvelle primitive $M(s) = \int (\cos(\theta(s), \sin\theta(s))ds$.

Exemple 2 Soit $M(t) = (R\cos t, R\sin t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$, le cercle de rayon R paramétré. La longueur s'écrit

$$s(t) = \int_0^t \|M'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u} du = Rt,$$

soit encore $t = s/R$. Ensuite $M'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ donc $T = (-\sin t, \cos t)$ et $N = (-\cos t, -\sin t)$ d'où $\kappa = 1/R$. La courbure est constante et égale à l'inverse du rayon.

Définition Parmi les cercles passant par un point $M(t)$ d'une courbe paramétrée, on appelle *cercle osculateur* un cercle ayant un point de contact d'ordre deux.

On peut démontrer que ce cercle a pour centre un point situé sur la droite orthogonale à la tangente en $M(t)$ et que son rayon est donné par l'inverse de la valeur absolue de la courbure.

3.2 Exercices

Exercice 11 *Déterminer les courbes planes birégulières à courbure constante.*

Exercice 12 ***(Courbure)*** *Déterminer les courbures et les rayons de courbures des courbes suivantes :*

1. $\gamma_1 : t \longrightarrow (3t - t^3, 3t^2)$.
2. *Deltoïde* $\gamma_2 : t \longrightarrow (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$.
3. *L'ellipse.*
4. *Cycloïde.*
5. *L'astroïde.*
6. *Spirale logémique. C'est-à-dire, pour* $c > 0$ *fixé, la courbe* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par*
$$t \longrightarrow (e^{-ct}\cos t, e^{-ct}\sin t).$$

Exercice 13 ***(Courbure en paramétrisation polaire)*** *Dans tous l'exercice,* f *désigne une fonction* $\mathcal{C}^2$ *d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Pour* $\theta \in \mathbb{R}$*, on pose* $e_r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ *et* $e_\theta(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$*. Soit* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, qui à* θ *associe* $\gamma(\theta) = f(\theta)e_r(\theta)$*.*

1. *Montrer que* γ *est une courbe paramétrée de classe* $\mathcal{C}^2$ *et que* $\gamma' = f'e_r + fe_\theta$.
2. *En déduire que la courbe est régulière si et seulement si* f *et* f' *ne s'annulent pas simultanément.*
3. *Déterminer le repère de Frénet en tout point régulier de* γ.
4. *Montrer que la courbure en un point régulier est donnée par la formule*
$$\kappa = \frac{f^2 + 2f' - ff''}{(f^2 + f'2)^{\frac{3}{2}}}.$$
5. *Calculer la longueur de* γ *sur l'intervalle* $[a, b] \subset I$.
6. *Application : calculer la courbure et la longueur dans le cas de la cardioïde* $f(\theta) = 1 + \cos\theta$*, avec* $a = 0$ *et* $b = 2\pi$.

Exercice 14 ***(Points d'inflexion)*** *On considère* Γ *l'arc paramétré du plan donné par* $t \longrightarrow \left(\frac{t^2+1}{t^3-1}, \frac{2t}{t^3-1}\right)$.

1. *Montrer que les points de paramètres t, u, v (distincts) sont alignés si et seulement si*
$$tuv = t + u + v + 1.$$
2. *Prouver que Γ admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.*

4 Courbes dans l'espace

4.1 Courbure et torsion

On supposera ici les courbes paramétrées *bi-régulières*, i.e. M' et M'' linéairement indépendants en tout point.

Comme pour les courbes planes, si la courbe est paramétrée par sa longueur, le vecteur tangent unitaire est $T(s) = M'(s)$;

Définition Le vecteur normal unitaire (appelé aussi *vecteur normal principal*) et la courbure sont définis par

$$N(s) := \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}, \qquad \text{et} \qquad \kappa(s) := \|T'(s)\|. \tag{15}$$

Remarque 2 Nous avons donc, comme pour les courbes planes

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \tag{16}$$

mais ici la courbure est, par définition, positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que T'. En effet, étant donné un vecteur unitaire dans l'espace et une droite orthogonale à ce vecteur, il n'y a aucun moyen de choisir raisonnablement entre les deux vecteurs unitaires de cette droite.

Définition On définit ensuite le vecteur unitaire $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ qui complète la paire de vecteur en une base orthonormée directe $\{T, N, B\}$ appelée *trièdre de Frenet.*

Considérons $B'(s)$, c'est un vecteur orthogonal à $B(s)$ mais aussi à $T(s)$ car $B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$ donc $B'(s)$ est colinéaire avec $N(s)$ et on peut définir un scalaire appelé la *torsion* par l'équation

$$B'(s) = -\tau(s)N(s). \tag{17}$$

Si $M(t)$ définit une courbe paramétrée birégulière, sa courbure et sa torsion sont naturellement définise comme la courbure et la torsion de la courbe reparamétrée par sa longueur, c'est-à-dire que si $s(t) = \int_a^t \|M'(u)\|du$ et $M(t) = M_1(s(t))$ on pose $\kappa(t) = \kappa_1(s(t))$ et $\tau(t) = \tau_1(s(t))$.

Nota Bene. Certain auteurs (par exemple [DOC76]) définissent la torsion par $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

Remarque. La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit trois fois dérivable, ensuite que la courbe soit bi-régulière au point où l'on veut définir la torsion (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire, en un point non bi-régulier, on ne peut pas définir le vecteur normal unitaire car $T'(s) = 0$). On observera aussi que la condition de bi-régularité impose que la courbure ne s'annule pas. En fait on peut voir que birégulière équivaut à régulière et $\kappa > 0$.

Calculons maintenant les coordonnées de N' dans la base T, N, B. Écrivons pour cela $N' = aT + bN + cB$. On obtient $a = T \cdot N' = -T' \cdot N = -\kappa$, $b = N \cdot N' = 0$ et $c = B \cdot N' = -B' \cdot N = \tau$, d'où :

$$N'(s) = -\kappa T(s) + \tau(s)B(s). \tag{18}$$

Théorème 7 *Soient $g(s)$ et $h(s)$ deux fonctions différentiables avec $g(s) > 0$, il existe une courbe paramétrée (unique à isométrie près) telles que la courbure et la torsion vérifient $\kappa(s) = g(s)$ et $\tau(s) = h(s)$.*

Preuve L'unicité provient d'un calcul similaire à celui effectué dans le plan. Soit $M_1(s)$, $M_2(s)$ ayant mêmes courbure et torsion ; après avoir appliqué une isométrie de l'espace, nous pouvons supposer que $M_1(0) = M_2(0)$, $T_1(0) = T_2(0)$ et $N_1(0) = N_2(0)$; on a alors $B_1(0) = B_2(0)$. Considérons la fonction $f(s) = T_1(s) \cdot T_2(s) + N_1(s) \cdot N_2(s) + B_1(s) \cdot B_2(s)$. Un calcul direct donne

$$f'(s) = T_1' \cdot T_2 + N_1' \cdot N_2 + B_1' \cdot B_2 + T_1 \cdot T_2' + N_1 \cdot N_2' + B_1(s) \cdot B_2'$$

$$= \kappa N_1 \cdot T_2 + (-\kappa T_1 + \tau B_1) \cdot N_2 - \tau B_1 \cdot B_2 + \kappa T_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot (-\kappa T_2 + \tau B_2) - \tau B_1(s) \cdot N_2 = 0.$$

Ainsi $f(s) = f(0) = 3$, mais $T_1 \cdot T_2 \leq 1$ avec égalité si et seulement si $T_1 = T_2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; on conclut donc que $M_1'(t) = M_2'(t)$ et comme $M_1(0) = M_2(0)$ que $M_1 = M_2$.

L'existence est plus délicate. On peut la démontrer (comme dans le plan) dans le cas analytique en observant que $M^{(n)}(0)$ peut se calculer en terme de $T(0), N(0), B(0)$ et des dérivées successives de κ et τ en 0. Dans le cas général, on peut la démontrer en invoquant un théorème garantissant l'existence de solution d'un système d'équations différentielles. Le système à résoudre est de dimension 9 et peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Exemple 3 Soit la courbe donnée par $M(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, avec $a, b > 0$, qu'il est raisonnable d'appeler *hélice.* On trouve

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2} du = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Donc, quitte à supposer $a^2 + b^2 = 1$ on peut se ramener à $s = t$. Alors $T(s) = M'(s) = (-a\sin s, a\cos s, b), T'(s) = (-a\cos s, -a\sin s, 0) = a(-\cos s, -\sin s, 0)$, et donc $\kappa(s) = a$ et $N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$. On en tire $B(s) = T(s)\wedge N(s) = (b\sin s, -b\cos s, a) = -bN(s)$.

Conclusion. La courbure est constante ($\kappa(s) = a$) ainsi que la torsion ($\tau(s) = b$). Si l'on ne suppose plus $a^2 + b^2 = 1$ on obtient en général :

$$\kappa(s) = a/\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{et} \qquad \tau(s) = b/\sqrt{a^2+b^2}.$$

Donnons maintenant des formules pour calculer courbure et torsion dans le cas d'une paramétrisation quelconque (mais toujours bi-régulière).

Soit $M_1(s)$ la reparamétrisation par sa longueur de la courbe $M(t)$, i.e. $M(t) = M_1(s(t))$, alors on a : $M'(t) = s'(t)M_1'(s(t)) = s'(t)T_1(s(t))$.

$M''(t) = s''(t)T_1(s(t)) + s'^2(t)\kappa(s(t))N_1(s(t))$

$M'''(t) = \big(s'''(t) - s'^3(t)\kappa(s(t))\big)\, T_1(s(t)) + \big(s''(t)s'(t) + \kappa(s(t)) + (s'^2(t\kappa(s(t))')\big)N_1(s(t)) + s'^3(t)\kappa\tau(s(t))B_1(s(t))$. On en tire donc

$$M'(t)\wedge M''(t) = s'^3(t)\kappa(s(t))T_1\wedge N_1 = s'^3(t)\kappa(t)B_1.$$

Ensuite $\det(M'(t), M''(t), M'''(t)) = s'^6\kappa(s(t))^2\tau(s(t))$ d'où les formules :

$$\kappa = \frac{\|M'(t)\wedge M''(t)\|}{\|M'(t)\|^3}. \tag{19}$$

$$\tau = \frac{\det(M'(t), M''(t), M'''(t))}{\|M'(t)\wedge M''(t)\|^2} \tag{20}$$

4.2 Exercices

(On redéfinit et calcule dans les deux exercices suivants de manière un peu différente courbure et torsion.)

Exercice 15 *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe $\mathcal{C}^\infty$ et régulière. On définit pour tout t dans I, le vecteur $T(t)$ par : $T(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)$. Pour tout t dans I, on définit la courbure $\kappa(t)$ de γ en $\gamma(t)$ par : $\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$. Si pour tout s dans I, $\|\gamma'(s)\| = 1$, alors $\kappa(s) = \|T'(s)\|$; autrement dit : $\kappa(s) = \left\|\frac{\mathrm{d}T(s)}{\mathrm{d}s}\right\|$, où s désigne le paramètre naturel sur γ.*

1. *Si pour tout s dans I, $\|\gamma'(s)\| = 1$, montrer que $\kappa(s) = \|\gamma''\|$.*
2. *Si pour tout s dans I, $\|\gamma'(s)\| = 1$, montrer que $\kappa(s) = \|T(s)\wedge T'(s)\|$ pour tout s dans I ; c'est-à-dire que : $\kappa(s) = \left\|T(s)\wedge\frac{\mathrm{d}T(s)}{\mathrm{d}s}\right\|$, où s est le paramètre naturel sur γ.*

3. *Montrer que pour tout t dans I, on a :* $\kappa(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$. *En déduire que pour tout t dans I, $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\kappa(t) \neq 0$.*

Exercice 16 *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe $\mathcal{C}^\infty$ et birégulière. Soit κ la courbure de γ. On définit pour tout t dans I, les vecteurs $T(t), N(t)$ et $B(t)$ par :* $T(t) = \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|}\gamma'(t)$, $N(t) = \dfrac{1}{\|T'(t)\|}T'(t)$ *et* $B(t) = T(t) \wedge N(t)$. *Le repère de Frenet associé à la courbe γ est (T, N, B). Pour tout t dans I, on définit la torsion $\tau(t)$ de γ en $\gamma(t)$ par :* $\tau(t) = -\dfrac{B'(t).N(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

1. *Montrer que $B'(t) = -\tau\|\gamma'(t)\|N(t)$ pour tout I dans I. Si on suppose que $\|\gamma'(s)\| = 1$ pour tout s dans I, alors : $B' = -\tau N$; ce qui se note :* $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} = -\tau N$.
2. *Montrer que* $N' = \|\gamma'(t)\|(-\kappa T + \tau B)$.
3. *Montrer que* $\det(T, T', T'') = \|\gamma'(t)\|\kappa^2\tau$ *(*$\det$ *étant le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).*
4. *Montrer que* $\tau = \dfrac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}$.

On dit que γ est trirégulière lorsque τ ne s'annule pas ; ce qui est équivalent à, pour tout t dans I : $\gamma'(t), \gamma''(t)$ et $\gamma'''(t)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 17 *Soient a et b des nombres réels. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, définie par :*

$$t \longrightarrow \gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

1. *Discuter, suivant les valeurs de a et b, la régularité de la courbe γ.*
2. *On se place dans le cas où γ est régulière. Déterminer la courbure κ de γ.*
3. *Pour quelles valeurs de a et b la courbe γ est-elle birégulière ?*
4. *Lorsque γ est birégulière, déterminer la torsion τ.*

Exercice 18 *Soit la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par*

$$t \longrightarrow \gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t).$$

1. *Montrer que γ est régulière et calculer le vecteur tangent unitaire T.*
2. *Calculer la longueur $L(t)$ de la courbe γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.*
3. *Donner le paramétrage par la longueur d'arc de γ.*
4. *Calculer la courbure κ et la torsion τ de γ.*
5. *calculer le rapport* $\dfrac{\tau}{\kappa}$.
6. *Calculer les vecteurs normal N et binormal B de γ.*

7. *On définit* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *par :* $\alpha(t) = \dfrac{\tau(t)}{\kappa(t)}T(t) + B(t)$. *Montrer que* α *est constante et que l'angle* α *et* $T(t)$ *est constant.*
8. *Soit* a *un élément de* $\mathbb{R}^3$ *de norme 1. Soit* I *un intervalle ouvert non vide de* $\mathbb{R}$. *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *une courbe gauche* $\mathcal{C}^\infty$ *et birégulière.* s *est un paramètre naturel de* γ. *On note* (T, N, B) *le repère de Frenet de* γ. *On suppose que l'angle formé par* a *et* $T(s)$ *est constant.*
   (a) *Montrer que, pour tout* s *dans* I, *le produit scalaire :* $a.N(s)$, *est nul.*
   (b) *Montrer que*

Exercice 19 *Calculer la courbure et la torsion des courbes suivantes :*

1. *La cubique gauche* $\gamma_2 : t \longrightarrow \left(t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{6}\right)$.
2. *La fenêtre de Viviani* $\gamma_3 : t \longrightarrow \left(\cos t, \sin t, 2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)$, *avec* $t \in [0, 4\pi]$.

Exercice 20 $\mathcal{C} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'arc orienté dans l'espace euclidien définie par*

$$t \longrightarrow \Big(\cos t, \sin t, \cosh t\Big)$$

1. *Montrer que le plan osculateur en un point de* $\mathcal{C}$ *reste tangent à une sphère fixe.*
2. *Déterminer au point de paramètre* t *le repère de Frenet et la courbure de* $\mathcal{C}$.

Exercice 21 *Déterminer les courbes dans l'espace euclidien tridimensionnel*

1. *à courbure nulle ;*
2. *à torsion nulle ;*
3. *à torsion nulle et courbure constante ;*
4. *à courbure et torsion constante.*

5 Inégalité isopérimétrique

On présente dans ce chapitre quelques idées mathématiques autour du théorème suivant.

Théorème 8 *Soit* C *un courbe fermée simple de classe* $\mathcal{C}^1$ *de longueur* $L = L(C)$ *entourant un domaine* D *d'aire* $A = A(D)$. *On a alors*

$$L^2 \geq 4\pi A. \tag{21}$$

De plus, si l'on a égalité dans (35), alors la courbe est un cercle.

Le théorème reste en fait valable sous la seule hypothèse que C est une courbe de Jordan.

5.1 Intégrales et séries de Fourier

Nous allons admettre le *théorème de Jordan* qui est assez évident intuitivement mais délicat à démontrer.

Théorème 9 *(Jordan) Soit $M : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ une courbe continue, simple et fermée (i.e. M est injective sur $[a,b[$ et $M(a) = M(b)$), alors la courbe image $C = M([a,b])$ sépare le plan en deux parties dont l'une, appelée intérieur de la courbe est bornée et l'autre, appelée extérieur de la courbe n'est pas bornée.*

Théorème 10 *(Formule de Green) Soit D un domaine du plan délimité par une courbe simple fermée C.*

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{22}$$

Preuve. Prouvons la formule lorsque D est un rectangle $[a,b] \times [c,d]$; le cas général s'en déduit par concaténation et passage à la limite que nous omettons. Appelons $C_1 = \{b\} \times [c,d]$, $C_2 = [a,b] \times \{d\}$, $C_3 = \{a\} \times [c,d]$ et $C_4 = [a,b] \times \{c\}$. On peut calculer

$$\begin{aligned}
&\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \\
&\quad = \int_{C_1} Q(x,y)dy + \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_3} Q(x,y)dy + \int_{C_4} P(x,y)dx \\
&\quad = \int_c^d Q(b,y)dy - \int_a^b P(x,d)dx - \int_c^d Q(a,y)dy + \int_a^b P(x,c)dx \\
&\qquad = \int_c^d \left(Q(b,y) - Q(a,y)\right) dy - \int_a^b \left(P(x,d) - P(x,c)\right) dx.
\end{aligned} \tag{23}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&\quad = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \right) dx \\
&\quad = \int_c^d \left(Q(b,y) - Q(a,y)\right) dy - \int_a^b \left(P(x,d) - P(x,c)\right) dx.
\end{aligned} \tag{24}$$

Corollaire 2 *Soit D un domaine borné délimité par une courbe simple fermée et $A = A(D)$ son aire. On a la formule*

$$A = \int_C xdy = -\int_C ydx. \tag{25}$$

Preuve. Prenons $Q = x$ et $P = 0$ dans la formule de Green (resp. $P = y$ et $Q = 0$).

Pour démontrer l'inégalité de Wirtinger ci-dessous nous introduisons les séries de Fourier ; nous n'utiliserons en fait que la formule de Parseval.

L'objet d'étude est l'ensemble des fonctions périodiques de période 2π, l'idée est d'essayer de les écrire comme "somme de leurs harmoniques" c'est-à-dire comme somme de termes $c_n e^{int}$ ou $a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$. Le lien entre les écritures complexe et réelle est donné par la formule élémentaire suivante, où l'on note $c_n = a_n + ib_n$:

$$c_n e^{int} + \bar{c}_n e^{-int} = 2a_n \cos(nt) + 2b_n \sin(nt)$$

En observant que l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$ vaut 2π si $n = 0$ et zéro si $n \neq 0$ est entier on voit que *formellement* un développement du type

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \tag{26}$$

correspond à des coefficients vérifiant

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \tag{27}$$

Si f est réelle il peut être intéressant de remplacer c_n par la paire de coefficients $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$ et $b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$. On peut, toujours aussi formellement effectuer le calcul suivant : le module au carré vaut $|f(t)|^2 = \sum_{m,n} c_m \bar{c}_n e^{i(m-n)t}$ et donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_n |c_n|^2. \tag{28}$$

Ceci suggère les définitions suivantes

Définition. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue et 2π-périodique, on appelle *coefficients de Fourier* de f les nombres

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{29}$$

et série de Fourier associée à f la somme

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}. \tag{30}$$

Remarquons que l'hypothèse f continue garantit que les fonctions $f(t)e^{-int}$ sont continues donc intégrables sur $[0, 2\pi]$. Il est naturel de demander si la série de Fourier d'une fonction continue est convergente et, si tel est le cas, si elle converge vers $f(t)$; on peut aussi se demander si la formule (28) est valide. La réponse à la première question est délicate : la série ne converge pas toujours mais converge quand même “presque toujours” ; par contre lorsqu'elle converge, elle converge vers la valeur attendue, c'est-à-dire $f(t)$. Nous ne servirons néanmoins que du résultat suivant, qui est d'ailleurs nettement plus simple à démontrer.

Théorème 11 *(Formule de Parseval) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue et 2π-périodique et $\hat{f}(n)$ ses coefficients de Fourier définis par (29), alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_n |\hat{f}(n)|^2. \tag{31}$$

Nous sommes en mesure de démontrer maintenant l'inégalité importante suivante.

Théorème 12 *(Inégalité de Wirtinger) Soit f une fonction réelle de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On a l'inégalité suivante :*

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt. \tag{32}$$

De plus on a égalité si et seulement $f(t)$ est de la forme $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$.

Preuve. Ecrivons le développement (formel) en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

On a alors, d'après l'inégalité de Parseval (31) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2).$$

La fonction $f'(t)$ est par hypothèse continue et l'on peut calculer ses coefficients de Fourier par intégration par parties

$$a'_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) n \sin(nt) dt = nb_n$$

$$b'_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) n \cos(nt) dt = -na_n$$

La série de Fourier $\sum_{n\geq 1} a'_n \cos(nt) + b'_n \sin(nt)$ n'est pas nécessairement convergente ponctuellement mais est convergente dans L^2. de toutes façons, d'après le théorème 11 on peut appliquer la formule de Parseval à f et f' :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt = \sum_{n\geq 1} a_n'^2 + b_n'^2 = \sum_{n\geq 1} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 \geq \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2.$$

Cela démontre l'inégalité annoncée. De plus, pour avoir égalité il faut clairement que $a_n = b_n = 0$ pour $n \geq 2$ et donc que la fonction f s'écrive sous la forme $f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t$.

Parmi les inégalités très utiles citons (la preuve est laissée en exercice) :

Théorème 13 *(inégalité de la moyenne émétique-géoméométrique) Soit $a, b, a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs.*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{ou, plus généralement} \quad \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \tag{33}$$

De plus on a égalité si et seulement si $a = b$ ou, pour la deuxième, $a_1 = \cdots = a_n$.

5.2 Preuves (de l'inégalité isopérimétrique)

Première preuve (à l'aide de l'inégalité de Wirtinger).

Le problème est invariant par isométries mais aussi par homothéties car si l'on applique une homothétie de rapport $\lambda > 0$, l'aire est multipliée par λ^2 et la longueur par λ, ainsi le rapport A/L^2 reste constant. On peut donc supposer que la courbe est paramétrée par son abscisse curviligne et que sa longueur est 2π. Ecrivons $M(s) = (f(s), g(s))$ la courbe paramétrée. Quitte à translater la courbe (ce qui ne modifie ni la longueur, ni l'aire) on peut supposer de plus que $\int_0^{2\pi} f(s)ds = 0$. On a donc

$$A = \int_C xdy = \int_0^{2\pi} f(s)g'(s)ds.$$

Par ailleurs

$$2\pi = L = \int_0^{2\pi} (f'(s)^2 + g'(s)^2)ds.$$

D'après l'inégalité (32) on a donc

$$2\pi - 2A = \int_0^{2\pi} (f'^2 + g'^2 - 2fg')ds = \int_0^{2\pi} (f'^2 - f^2)ds + \int_0^{2\pi} (g' - f)^2 ds \geq 0.$$

De plus cette intégrale est nulle si et seulement si $f(s) = a\cos s + b\sin s$ et $g'(s) = f(s)$ donc $g(s) = a\sin s - b\cos s + c$, ce qui donne bien la paramétrisation d'un cercle. On obtient donc $2\pi \geq 2A$ ou encore $(2\pi)^2 \geq 4\pi A$ comme annoncé, avec comme unique cas d'égalité un cercle.

Deuxième preuve (à l'aide de l'inégalité de la moyenne émétique-géométrique).

Après éventuellement translation on peut supposer que la courbe C paramétrée par sa longueur est incluse dans la bande verticale $-r \leq x \leq r$ et que $x(0) = r$ et disons $x(s_0) = -r$ (i.e la courbe touche les deux bords de la bande). On paramètre le cercle de centre 0 et rayon r ainsi : on pose $x_1(s) = x(s)$ et

$$y_1(s) := \begin{cases} \sqrt{r^2 - x_1^2(s)} & \text{si } s \in [0, s_0] \\ -\sqrt{r^2 - x_1^2(s)} & \text{si } s \in [s_0, L] \end{cases}$$

On a alors $A = \int_0^L xy'ds$ et $A_1 = \pi r^2 = -\int_0^L x_1 y_1 ds = -\int_0^L xy_1 ds$ et donc :

$$A + A_1 = A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - x'y_1)ds \leq \int_0^L |xy' - x'y_1|ds$$

Observons maintenant que

$$|xy' - x'y_1|^2 = x^2y'^2 + x'^2y_1^2 - 2xx'y'y_1 \leq (x'^2 + y'^2)(x^2 + y_1^2) = 1.r^2 \quad (34)$$

On en tire bien sûr $A + \pi r^2 \leq Lr$. En appliquant l'inégalité de la moyenne émétique-géométrique on obtient

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{Lr}{2}$$

qui est équivalente à $4\pi A \leq L^2$.

On peut analyser les cas d'égalité et en déduire également qu'ils correspondent aux cercles.

Pour cela observons qu'ici l'inégalité de la moyenne émétique-géométrique (théorème 13) est une égalité si et seulement si $A = \pi r^2$; d'autre part on a $x^2y'^2 + x'^2y_1^2 - 2xx'y'y_1 + (xx' + y_1y')^2 = (x'^2 + y'^2)(x^2 + y_1^2)$ donc l'égalité dans l'inégalité (34) se produit seulement si $xx' + y_1y' = 0$. De $x^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$ on tire $xx' + y_1y_1' = 0$ et donc $y' = y_1'$ puis $y = y_1 + C_0$; ainsi, comme par construction $x = x_1$, la courbe C s'obtient par translation du cercle et est donc elle-même un cercle.

5.3 Généralisation

En passant en dimension trois, l'analogue du théorème 35 s'écrit

Théorème 14 *Soit S une surface fermée simple de classe $\mathcal{C}^1$ d'aire $A = A(S)$ entourant un domaine D de volume $V = V(D)$. On a alors*

$$A^3 \geq 36\pi V^2. \quad (35)$$

On remarque d'ailleurs que la valeur minimale de A^3/V^2 est atteinte pour la sphère S de rayon r limitant la boule B de rayon r ; en effet $A(S) = 4\pi r^2$ et $V(B) = \frac{4}{3}\pi r^3$ donc $A(S)^3/V(B)^2 = 36\pi$. On laisse à l'imagination la formulation d'une inégalité isopérimétrique dans $\mathbf{R}^n$ (penser à la sphère définie par $||X||^2 \leq 1$ et la boule définie par $||X||^2 = 1$), on pourra aussi chercher dans [BEGO92].

5.4 Exercices

Calculer la longueur des courbes suivantes ainsi que l'aire qu'elles délimitent ; vérifier directement dans chaque cas l'inégalité isopérimétrique.

1. L'ellipse [1] paramétrée par $M(t) = (a\cos t, b\sin t)$.
2. Un polygone régulier à n côtés.

1. Vérifier directement l'inégalité isopérimétrique est possible mais délicat sur cet exemple.

6 Surfaces dans $\mathbf{R}^3$

6.1 Première et deuxième formes fondamentales

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ (par exemple un rectangle $]a,b[\times]c,d[$) et $M : U \to \mathbf{R}^3$ une application différentiable ; on supposera toujours l'application *régulière*, i.e. que les deux dérivées partielles $M'_u(u,v) = \frac{\partial M}{\partial u}(u,v)$ et $M'_v(u,v) = \frac{\partial M}{\partial v}(u,v)$ sont linéairement indépendantes. Dans ces conditions on peut définir le *plan tangent* comme le plan engendré par $M'_u(u,v)$, $M'_v(u,v)$ et le *vecteur normal* par

$$N(u,v) = \frac{M'_u(u,v) \wedge M'_v(u,v)}{\|M'_u(u,v) \wedge M'_v(u,v)\|}. \tag{36}$$

Remarque 3 Soit S_1 et S_2 deux surfaces ; une application $f : S_1 \to \mathbf{R}^n$ est dite *différentiable* en $P \in S_1$ s'il existe une paramétrisation régulière $M : U \to S_1$ d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ vers un voisinage de P avec disons $M(0) = P$ telle que $f \circ M$ soit différentiable en 0. Remarquons qu'on voit aisément que si $f : S_1 \to S_2$ une application différentiable, alors la différentielle envoie le plan tangent $T_P(S_1)$ dans $T_{f(P)}(S_2)$.

Exemple 4 La sphère dans $\mathbf{R}^3$ peut être définie par une équation $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ou paramétrisée par exemple par

$$M(\theta,\phi) = (R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\phi), \tag{37}$$

ou encore (projection stéréographique) par

$$M(u,v) = \left(\frac{2Ru}{1+u^2+v^2}, \frac{2Rv}{1+u^2+v^2}, \frac{R(u^2+v^2-1)}{1+u^2+v^2}\right). \tag{38}$$

Le plan tangent en un point M de la sphère est le plan orthogonal au vecteur M ; en d'autres termes la normale au plan tangent est engendrée par le vecteur M.

Définition 3 *L'aire d'une surface paramétrée $M : U \to \mathbf{R}^3$ est définie par*

$$\mathrm{Aire}\,(M(U)) := \iint_U \|M'_u \wedge M'_v\| du dv. \tag{39}$$

Plus généralement, si $f : S \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$) est une fonction définie sur la surface image, on posera

$$\iint_S f d\sigma := \iint_U f(M(u,v))\|M'_u \wedge M'_v\| du dv. \tag{40}$$

Remarque 4 Cette définition coïncide avec la notion intuitive d'aire, en particulier si on définit l'aire comme limite sur des triangulations. On observera que si $f : V \to U$ est une bijection différentiable, la formule de changement de variables dans les intégrales multiples permet de montrer que $\mathrm{Aire}\,(M(U)) =$

Aire $(M \circ f(V))$. En effet si $f(s,t) = (f_1(s,t), f_2(s,t))$ on définit le *jacobien* de f par la formule :

$$J_f(s,t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial f_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$(M\circ f)'_s \wedge (M\circ f)'_t = \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} M'_u \circ f + \frac{\partial f_2}{\partial s} M'_v \circ f\right) \wedge \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} M'_u \circ f + \frac{\partial f_2}{\partial t} M'_v \circ f\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)(M'_u \wedge M'_v)\circ f = J_f (M'_u \wedge M'_v)\circ f$$

On obtient ainsi

$$\int\!\!\int_U \|M'_u \wedge M'_v\| du dv = \int\!\!\int_V |J_f| \, \|(M'_u \wedge M'_v)\circ f\| ds dt = \int\!\!\int_V \|(M\circ f)'_s \wedge (M\circ f)'_t\| ds dt$$

où la première égalité est la formule de changement de variables dans les intégrales doubles.

Première forme fondamentale. On note $I_P(U,V)$ le produit scalaire $T_P(S) \times T_P(S)$, restriction du produit scalaire de $\mathbf{R}^3$ au plan tangent en P.

La première forme fondamentale permet de calculer la longueur d'une courbe tracée sur la surface en terme du vecteur tangent ; plus précisément on a la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit $L(u) \in S$ une courbe paramétrée tracée sur la surface S, la longueur de l'arc est calculée par la formule*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I(L'(u), L'(u))} ds. \tag{41}$$

Définition. On définit l'angle entre deux courbes $L_1(s)$, $L_2(s)$ tracées sur S et passant par un point $P = L_1(t_0) = L_2(t_0)$ par la formule

$$\cos\theta = \frac{I(L'_1(s), L'_2(s))}{\sqrt{I(L'_1(s), L'_1(s))}\sqrt{I(L'_2(s), L'_2(s))}}. \tag{42}$$

Notation. On note E, F, G les coefficients de la première forme fondamentale dans la base M'_u, M'_v, i.e. les coeffcients tels que, pour $X = xM'_u + yM'_v$ on a

$$I(X,X) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2. \tag{43}$$

où l'on a posé :

$$E := \|M'_u\|^2, \quad F = M'_u \cdot M'_v \quad \text{et} \quad G = \|M'_v\|^2. \tag{44}$$

Exemple 5 Considérons deux courbes de coordonnées, i.e. $L_1(t) := M(t, v_0)$ et $L_2(t) = M(u_0, t)$ de sorte que les deux courbes se croisent au point $P = M(u_0, v_0)$. L'angle des deux courbes en ce point donne un cosinus égal à :

$$\cos\theta = \frac{M'_u \cdot M'_v}{\|M'_u\| \, \|M'_v\|}(u_0, v_0) = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

en particulier le système de coordonnées est *orthogonal* si et seulement si $F = 0$.

Pour le calcul d'une portion d'aire, observons que

$$\|M'_u \wedge M'_v\|^2 = \|M'_u\|^2 \, \|M'_v\|^2 - (M'_u \cdot M'_v)^2 = EG - F^2,$$

donc

$$A(M(\mathcal{U})) = \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

On appelle *application de Gauss* l'application de S vers la sphère S^2 qui a un point P de S associe le vecteur unitaire normal au plan tangent. On note cette application

$$N = N_S : S \to \mathrm{S}^2, \quad P \mapsto N_P \tag{45}$$

Remarquons que le plan tangent $T_P(S)$ est le plan orthogonal à N_P et s'identifie donc au plan tangent à S^2 ; on peut dont voir la différentielle de N_P comme un endomorphisme de $T_P(S)$.

$$dN = dN_P : T_P(S) \to T_P(S). \tag{46}$$

Deuxième forme fondamentale. On appelle *deuxième forme fondamentale* l'application bilinéaire $II_P(\cdot,\cdot) : T_P(S) \times T_P(S) \to \mathbf{R}$ définie par la formule

$$II(x, y) = II_P(x, y) = -I(dN(x), y). \tag{47}$$

Lemme 3 *L'endomorphisme $dN = dN_S : T_P(S) \to T_P(S)$ est symétrique par rapport à la première forme fondamentale, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in T_P(S)$ on a :*

$$I_P(dN(x), y) = I_P(x, dN(y)). \tag{48}$$

Preuve. On observe d'abord que $dN(M'_u) = N'_u$ et $dN(M'_v) = N'_v$. Ensuite on a $N \cdot M'_u = N \cdot M'_v = 0$ donc en dérivant on trouve $N'_v \cdot M'_u + N \cdot M''_{uv} = 0$ et $N'_u \cdot M'_v + N \cdot M''_{vu} = 0$ donc $N'_v \cdot M'_u = N'_u \cdot M'_v$. On en tire donc :

$$I(dN(M'_u), M'_v) = N'_u \cdot M'_v = N'_v \cdot M'_u = I(dN(M'_v), M'_u).$$

6.2 Application de Gauss et courbure

On a déjà défini la notion de courbure pour une courbe dans l'espace ; on va maintenant définir d'utres notions de courbures : courbures normale et géodésique associées à une courbe tracée sur une surface, puis courbures moyenne et gaussienne associées ùne surface.

Soit C une courbe tracé sur la surface, on peut définir son trièdre de Frenet, l'analogue du trièdre de Frenet pour la surface est ici donné par M'_u, M'_v et $N = M'_u \wedge M'_v / \|M'_u \wedge M'_v\|$ (noter cependant que ce dernier n'est pas un repère orthonormé ni même orthogonal).

Définition 4 Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée par sa longueur et tracée sur la surface $M(u, v)$. Notons T le vecteur tangent unitaire à la courbe, N le vecteur normal à la surface et enfin $U := N \wedge T$. On définit la *courbure normale* notée κ_n et la *courbure géodésique* notée κ_g par l'équation :

$$T'(s) = \kappa_n N + \kappa_g U. \tag{49}$$

Remarque 5 On dit qu'une courbe tracé sur une surface est une *géodésique* si $\kappa_g = 0$; on peut montrer que cette équation correspond bien à la propriété intuitive d'être (localement) le plus court chemin sur la surface.

Proposition 6 *On peut exprimer la courbure normale des façons suivantes*

1. *Soit T le vecteur tangent unitaire à la courbe, notons $II = II_P$ la deuxième forme fondamentale alors :*

$$\kappa_n = II(T, T) \tag{50}$$

2. *Notons κ la courbure de la courbe et θ l'angle du vecteur normal principal de la courbe avec le vecteur normal de la surface ; on a alors*

$$\kappa_n = \kappa \cos\theta. \tag{51}$$

Définition 5 Soit e_1, e_2 une base (orthonormée) de l'espace tangent dans laquelle dN est diagonale, i.e.

$$dN(e_1) = -\kappa e_1, \quad dN(e_2) = -\kappa e_2 \qquad \text{avec} \quad \kappa_1 \leq \kappa_2. \tag{52}$$

Les quantités κ_1, κ_2 s'appellent les *courbures principales* de la surface au point P ; les droites engendrées par e_1, e_2 s'appellent les *directions principales* de la surface au point P ; le produit $\kappa_1 \cdot \kappa_2$ s'appelle la *courbure gaussienne*, la demi-somme $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ s'appelle la *courbure moyenne.* Les deux droites engendrées par e_1, e_2 s'appellent les *directions principales.*

D'après les définitions, on a :

$$K := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(dN) \qquad \text{et} \qquad H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(dN). \tag{53}$$

Voyons maintenant comment calculer concrètement les quantités définies.

Donnons-nous une surface S avec une paramétrisation régulière $M(u,v)$.

Calcul des courbures normales et géodésiques. Soit $L(s)$ une courbe paramétrée par sa longueur et tracée sur S. On calcule la normale à la surface $N = M'_u \wedge M'_v / \|M'_u \wedge M'_v\|$ puis $T = L'$, $T' = L''$ et $U = N \wedge T$; on a alors

$$\kappa_n = L'' \cdot N \qquad \text{et} \qquad \kappa_g = L'' \cdot U.$$

Calcul des courbures gaussienne et moyenne. Ecrivons les deux formes fondamentales, pour $X = xM'_u + yM'_v$:

$$I(X,X) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 \qquad \text{et} \qquad II(X,X) = ex^2 + 2fxy + gy^2$$

avec donc

$$E := \|M'_u\|^2,\ F := M'_u \cdot M'_v,\ G := \|M'_v\|^2 \quad \text{et} \quad e := N \cdot M''_{uu},\ f := N \cdot M''_{uv},\ g := N \cdot M''_{vv}.$$

Si l'on note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice de dN dans la base M'_u, M'_v on obtient la relation

$$A = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

d'où les formules

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},\ a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},\ a_{21} = \frac{eF - fG}{EG - F^2},\ a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \qquad (54)$$

et enfin

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad \text{et} \qquad H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \qquad (55)$$

Exemple 6

6.3 Géodésiques et formule de Gauss-Bonnet

L'ancêtre de la formule de Gauss-Bonnet est le théorème d'Euclide.

Théorème 15 *La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à π.*

On peut assez aisément généraliser cela à un polygone quelconque à n sommets. En effet si α_i désigne l'angle intérieur en un sommet P_i et si l'on note θ_i l'angle extérieur, on voit assez facilement (au moins intuitivement) que la somme des θ_i vaut 2π et celle des α_i vaut donc $(n-2)\pi$.

Si l'on remplace maintenant les arêtes du polygone par des (morceaux de) courbes différentiables, on peut encore définir l'angle en un sommet comme l'angle entre les tangentes. On peut de plus interpréter la variation de l'angle de la tangente comme l'intégrale de la courbure. Ceci se traduit par la formule suivante

Théorème 16 *Soit une courbe plane simple, fermée, composée de courbes différentiables C_i se raccordant avec des tangentes faisant un angle (extérieur) θ_i ; on a la formule*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \kappa ds + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi.$$

La généralisation de cette formule à une courbe tracée sur une surface non plane fait intervenir des quantités similaires (où la courbure géodésique remplace la courbure plane) et un terme nouveau lié à la courbure gaussienne de la surface.

Théorème 17 *Soit D un domaine homéomorphe à un disque dans une surface S, supposons que D est délimité par une courbe fermée C composée de k courbes régulières C_i se raccordant avec des angles θ_i ; on note κ_g la courbure géodésique le long de C_i et K la courbure gaussienne sur S. On a alors la formule :*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi. \tag{56}$$

Rappelons que l'intégrale sur le domaine peut s'interpréter, si $D = M(U)$ pour une paramétrisation $M : U \to D \subset \mathbf{R}^3$ comme

$$\iint_D K d\sigma := \iint_U K(u,v) \|M'_u \wedge M'_v\| du dv.$$

Enonçons quelques cas particuliers intéressants

Corollaire 3 *Supposons de plus que les courbes C_i sont des géodésiques, alors*

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi - \iint_D K d\sigma. \tag{57}$$

En particulier on retrouve que, si la courbure gaussienne est nulle (resp. positive, resp. négative), la somme des angles extérieurs d'un polygone géodésique est égale à 2π (resp. inférieure à 2π, resp. supérieure à 2π).

Ce corollaire contient donc le vieux théorème d'Euclide (Thales ?) rappelé plus haut, énonçant que la somme des angles *intérieurs* (i.e. $\alpha_i = \pi - \theta_i$) d'un triangle vaut π ; on s'aperçoit aussi que sur une sphère (resp. un hyperboloïde), où $K > 0$ (resp. où $K < 0$), la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique est supérieure à π (resp. inférieure à π).

Corollaire 4 *Considérons le cas d'une géodésique fermée, on obtient alors*

$$\iint_D K d\sigma = 2\pi. \tag{58}$$

Généralisation. Il est très intéressant de généraliser la formule (60) au cas d'un domaine quelconque délimité par une courbe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Il faut pour cela introduire un concept topologique : celui de caractéristique d'Euler-Poincaré.

L'idée est la suivante : on définit une *triangulation* $\mathcal{T}$ d'une surface S puis la quantité :

$$\chi(S,\mathcal{T}) := \sharp\{\text{faces}\} - \sharp\{\text{arêtes}\} + \sharp\{\text{sommets}\} \tag{59}$$

On démontre alors que cette quantité est indépendante de la triangulation et on appelle alors caractéristique d'Euler-Poincaré de S le nombre $\chi(S) := \chi(S,\mathcal{T})$.

Définition. Un "triangle" sur une surface est l'image homéomorphe (application bijective et bicontinue sur son image) du triangle $T_0 := \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 \mid 0 \leq x, y \text{ et } x+y \leq 1\}$, ces arêtes et sommets sont les images des trois arêtes et sommets de T_0. Une *triangulation* d'une surface est un recouvrement par un nombre fini de triangles T_i tels que $T_i \cap T_j$ soit ou bien une arête, ou bien un sommet ou bien l'ensemble vide.

Exemple 7

1. *Le disque D peut être vu comme un seul triangle (topologiquement) donc $\chi(D) = 1 - 3 + 3 = 1$*
2. *Dessinons une triangulation de la sphère S en traçant l'équateur et deux méridiens reliant pôles sud et nord. On constate alors que $\chi(S) = 4 - 6 + 4 = 2$.*
3. *Prenons l'exemple d'un tore T ; en dessinant une triangulation comme sur la figure ci-dessous, on constate que $\chi(T) = 0$.*
4. *Plus généralement si on considère une surface composée d'une sphère avec g anses ou un tore à g trous comme sur la figure ci-dessous, on constate que $\chi = 2 - 2g$.*

Théorème 18 *Soit D un domaine dans une surface S, supposons que D est délimité par une courbe fermée C composée de k courbes régulières C_i se raccordant avec des angles θ_i ; on note κ_g la courbure géodésique le long de C_i et K la courbure gaussienne sur S. On a alors la formule :*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \kappa_g ds + \iint_D K d\sigma + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi\chi(D). \tag{60}$$

Corollaire 5 *Soit S une surface fermée de $\mathcal{R}^3$, alors :*

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S) \tag{61}$$

6.4 Exercices

Exercice 22 ***(Application de Gauss)*** *Déterminer l'application de Gauss des graphes des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ suivantes :*

1. $f_1(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $f_2(x,y) = x^2 - y^2$.
3. $f_3(x,y) = xy$.

Exercice 23 ***(Sphère)*** *Soit le réel $R > 0$ fixé. On considère la sphère S de centre O et de rayon R, définie par les équations paramétriques :*

$$S : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & R\cos\varphi\cos\theta \\ y & = & R\cos\varphi\sin\theta \\ z & = & R\sin\varphi \end{array} \right. , \qquad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi[$$

1. *Déterminer la courbe caractéristique définie par $\theta_0 = 0$. La dessiner sur la sphère S.*
2. *Déterminer la courbe caractéristique définie par $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. La dessiner sur la sphère S.*
3. *Déterminer la courbe caractéristique définie par $\varphi_0 = 0$. La dessiner sur la sphère S.*
4. *Déterminer la courbe caractéristique définie par $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. La dessiner sur la sphère S.*
5. *Calculer des équations paramétriques du plan tangent P_0 à la sphère S au point $M_0(\varphi_0, \theta_0)$, de paramètres $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_0 = 0$.*
6. *Calculer un vecteur normal $\vec{n}_0$ à la sphère S au point M_0.*
7. *Dessiner la sphère S, le point M_0, le plan tangent P_0, les deux vecteurs tangents en M_0 et le vecteur normal $\vec{n}_0$.*

Exercice 24 ***(Tore)*** *Mêmes questions que le précédent exercice, pour le tore T de centre O, de petit rayon r et de grand rayon R (i.e. on suppose $0 < r > R$) :*

$$T : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & (r\cos\varphi + R)\cos\theta \\ y & = & (r\cos\varphi + R)\sin\theta \\ z & = & r\sin\varphi \end{array} \right. , \qquad \varphi \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, 2\pi[$$

Exercice 25 ***(Surfaces de révolution)***

1. *Soit la surface de révolution S obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe plane C définie de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $C(u) = (f(u), 0, g(u))$, où $f(u) > 0$ et $g(u)$ est une courbe régulière.*
   (a) *Déterminer des équations paramétriques scalaires de la surface S.*
   (b) *Quels sont les points réguliers de cette surface ?*
2. *Déterminer des équations paramétriques scalaires et l'équation cartésienne des surfaces suivantes :*
   (a) *Cylindre d'axe (Oz) et de rayon R.*

(b) *Cône de révolution d'axe (Oz) et de demi-angle α.*

(c) *Paraboloïde de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) une branche d'une parabole.*

(d) *Hyperboloïde à une nappe obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz), la courbe C avec $f(u) = \cosh u$ et $g(u) = \sinh u$.*

(e) *Caténoïde obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz), la chaînette définie par $y = 0$ et $x = \cosh z$.*

(f) *Tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oz, le cercle dans le plan xOz de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon r , avec $r < R$.*

3. *Expliquer comment peut-on obtenir les équations paramétriques de surfaces de révolution d'axe une droite quelconque de l'espace tri-dimensionel.*

Exercice 26 ***(Hélicoïde)*** *On considère la surface $X : [-1, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$.*

1. *Soit $a \in [-1, 1]$ fixé. Décrire l'ensemble des points $X(a, v)$ de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer l'application de Gauss de X.*

Exercice 27 ***(Ruban de Möbius)*** *On considère la surface $X :]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par*

$$(u, v) \mapsto \left(\left(1 - u \sin\left(\frac{v}{2}\right)\right) \cos v, \left(1 - u \sin(\frac{v}{2})\right) \sin v, u \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right).$$

1. *Montrer que X est une paramétrisation régulière.*
2. *Déterminer le vecteur normal unitaire $N_X(0, v)$ de X en $(0, v)$.*
3. *Déterminer $\lim\limits_{v \to 0^+} N_X(0, v)$ et $\lim\limits_{v \to 2\pi^-} N_X(0, v)$. Que peut-on déduire ?*

Exercice 28 ***(Tube autour d'une courbe)*** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert (non vide). Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une C^∞-courbe birégulière et normale. On note (T, N, B) le repère de Frenet de γ. On considère la surface paramétrée X définie sur $I\times]0, 2\pi[$ par :*

$$X(s, t) = \gamma(s) + R\Big((\cos t)N(s) + (\sin t)B(s)\Big)$$

où R désigne un nombre réel strictement positif dont l'inverse majore la courbure κ de γ. à l'aide de dessins, décrire la surface X.

Références

[BEGO92] Marcel Berger, Bernard Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* P.U.F, 1992.

[DOC76] Manfredo do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, 1976.